

**С. Б. Нестеров  
Ю. К. Васильев  
А. В. Андросов**

# **МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ**

**Москва**

**Издательство МЭИ**

**2004**

УДК 621.52.001.24 (075.8)  
ББК 31.77я73  
Н 561

*Гранты Президента РФ на поддержку молодых российских ученых  
и ведущих научных школ на выполнение научных исследований  
№№ МК-1305.2003.02, МК-4185.2004.08, НШ-1517.2003.08*

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского  
В.В. Слепцов; доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой МТ-11  
МГТУ им. Н.Э. Баумана Ю.В. Панфилов

**Нестеров С.Б., Васильев Ю.К., Андросов А.В.**  
Н561 Методы расчета вакуумных систем. — М.: Издательство МЭИ,  
2004. — 220 с.: ил.

ISBN 5-7046-1012-9

Описаны методы расчета сложных вакуумных систем, а также рассмотрены  
примеры применения данных методов для решения прикладных задач.

Для студентов специальности «Техника и физика низких температур»  
института теплоэнергетики и технической физики МЭИ.

Табл. 23. Ил. 132. Библиогр. 11 назв.

**УДК 621.52.001.24 (075.8)**  
**ББК 31.77я73**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	5
Основные условные обозначения .....	6
Введение .....	7
Глава 1. Основные понятия вакуумной техники .....	10
Глава 2. Методы расчета .....	15
2.1. Обзор методов расчета .....	15
2.2. Метод угловых коэффициентов .....	25
2.2.1. Основные понятия .....	25
2.2.2. Расчет угловых коэффициентов .....	27
2.2.3. Примеры решения задач методом угловых коэффициентов .....	36
2.3. Метод Монте-Карло пробной частицы для свободномолекулярного режима .....	45
2.3.1. Описание общего алгоритма .....	45
2.3.2. Построение полярных диаграмм скоростей частиц .....	59
2.3.3. Нахождение пространственного распределения частиц .....	61
2.3.4. Типы угловых распределений .....	63
2.3.5. Учет времени полета частицы .....	65
2.3.6. Учет скорости частицы .....	66
2.3.7. Определение распределения концентрации и давления .....	68
2.3.8. Пример расчета параметров коаксиального трубопровода .....	71
2.4. Метод Монте-Карло пробной частицы для режимов, допускающих межмолекулярные взаимодействия .....	76
2.5. Метод эквивалентных поверхностей .....	78
2.6. Метод балансовых уравнений .....	79
2.6.1. Аналитические соотношения .....	86
2.6.2. Расчет коэффициента захвата крионасоса Marathon-8 с помощью предложенного алгоритма .....	93
Глава 3. Использование методов расчета для анализа сложных вакуумных систем .....	96
3.1. Реальные вакуумные системы и их классификация .....	96
3.2. Проводимость сложного трубопровода в свободномолекулярном режиме .....	98
3.2.1. Основные понятия .....	98
3.2.2. Методы расчета общей проводимости сложного трубопровода .....	100
3.2.3. Алгоритм расчета проводимости по теореме аддитивности обратной проводимости .....	103
3.2.4. Сравнение значений суммарной проводимости при ее расчетах разными методами .....	103
3.2.5. Пример расчета сложного трубопровода .....	106

3.3. Расчет характеристик откачных систем .....	111
3.3.1. Расчет проводимости и коэффициента захвата криоловушки с учетом формирующегося криослоя .....	111
3.3.2. Расчет и проектирование крионасоса .....	115
3.3.3. Комплексное исследование системы откачки продуктов термоядерного синтеза ITER .....	135
3.4. Анализ испытательных камер для определения характеристик откачных систем .....	140
<b>Глава 4. Использование методов расчета для анализа локальных характеристик элементов сложных вакуумных систем .....</b>	<b>147</b>
4.1. Расчет профилей криослоев .....	147
4.1.1. Зависимости для определения профилей криослоев .....	148
4.1.2. Учет нелинейности .....	171
4.1.3. Пример расчета профиля криослоя .....	172
4.2. Влияние микрогеометрии сорбентов на сорбционные характеристики крионасосов .....	173
4.2.1. Изучение характера поверхностей разных сорбентов .....	174
4.2.2. Моделирование фрагмента поверхности .....	177
4.3. Влияние углового распределения частиц на проводимость .....	180
4.3.1. Описание метода расчетов .....	180
4.3.2. Влияние закона распределения .....	182
4.3.3. Влияние значения коэффициента прилипания .....	185
4.4. Анализ криовакуумных условий в зоне вакуумной изоляции катушек тороидального поля ITER .....	190
4.4.1. Физические предпосылки и методология расчета .....	191
4.4.2. Общие условия расчетов .....	192
4.4.3. Расчет проводимости патрубков VVTS и лабиринтных соединений .....	196
4.4.4. Расчет распределения давления .....	198
<b>Глава 5. Использование различных методов расчета для решения смежных задач вакуумной техники. Исследование термомолекулярного эффекта .....</b>	<b>206</b>
5.1. Расчет для случая двух сфер, соединенных диафрагмой .....	207
5.2. Расчет для случая двух сфер, соединенных трубопроводом .....	208
5.3. Влияние геометрии и температуры .....	208
<b>Глава 6. Использование различных методов расчета для структурно- параметрической оптимизации сложных вакуумных систем .....</b>	<b>212</b>
6.1. Конструкции и описание крионасосов .....	212
6.2. Анализ влияния геометрических характеристик экрана на его эффективность .....	214
Контрольные вопросы и задания .....	218
Список литературы .....	219

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие методов проектировочных расчетов вакуумного оборудования тесно связано с постоянным расширением областей его применения и в связи с этим с усложнением его структурных и технико-эксплуатационных характеристик. Эффективность и функциональная надежность различного технологического оборудования, в том числе и вакуумного, непосредственным образом зависят от правильности принятых проектных решений. При этом необходимость обоснованности этих решений существенно возрастает при конструировании систем, используемых в таких ответственных приложениях, как термоядерная энергетика, системы моделирования космического пространства и др. Таким образом, создаются предпосылки к выделению области проектировочного анализа вакуумных систем в отдельную сферу, отвечающую за разработку наиболее эффективных конструкций и режимов эксплуатации вакуумного оборудования.

Задача авторов данной книги — наиболее подробно рассказать о различных методах расчетов вакуумных систем, которые используются на практике при конструировании нового или модернизации существующего вакуумного оборудования, указать ключевые особенности этих методов и области их применения. Нужно сказать, что большое внимание уделено различным деталям использования рассмотренных подходов, а также вопросам их именно практической реализации — приводятся исходные тексты программ для расчета, выводы расчетных формул и другая информация, необходимая для эффективного освоения методов анализа вакуумных систем. Для иллюстрации областей применения того или иного метода приведены решения ряда актуальных практических задач проектирования и модернизации вакуумного оборудования.

*Авторы*

## ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$C$  — количество накопленного газа, л;  
 $E, e, \varepsilon$  — коэффициент излучения (эмиссивность);  
 $f_x$  — функция распределения;  
 $F$  — площадь,  $\text{м}^2$ ;  
 $k$  — постоянная Больцмана, Дж/К;  
 $K_{\text{захв}}, \sigma$  — коэффициент захвата;  
 $k_{\text{кл}}$  — коэффициент Клаузинга;  
 $K_{\text{п}}$  — число Кнудсена;  
 $l_c, m_c, n_c$  — направляющие косинусы;  
 $M$  — молярная масса, кг/моль;  
 $n$  — концентрация молекул,  $1/\text{м}^3$ ;  
 $p$  — давление, Па;  
 $P$  — относительная проводимость;  
 $P(x)$  — линейная плотность вероятности;  
 $Q$  — молекулярный поток,  $\text{м}^3 \cdot \text{Па}/\text{с}$ ;  
 $q$  — плотность потока молекул,  $\text{м}^3 \cdot \text{Па}/(\text{с} \cdot \text{м}^2)$ ;  
 $Q_0$  — холодопроизводительность, Вт;  
 $R_0$  — универсальная газовая постоянная, Дж/(К·моль);  
 $S_{\text{н}}$  — быстрота действия насоса,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  
 $S$  — быстрота откачки,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  
 $T$  — температура, К;  
 $U$  — проводимость,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  
 $v$  — скорость, м/с;  
 $v_{\text{н.в}}$  — наиболее вероятная скорость, м/с;  
 $v_{\text{а}}$  — среднеарифметическая скорость, м/с;  
 $v_{\text{кв}}$  — среднеквадратичная скорость, м/с;  
 $V$  — объем,  $\text{м}^3$ ;  
 $V_0$  — объем молекул, ударяющихся о единичную поверхность в единицу времени,  $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  
 $W(\varphi)$  — угловая плотность вероятности;  
 $\alpha$  — коэффициент пропускания;  
 $\beta$  — коэффициент отражения;  
 $\gamma$  — коэффициент прилипания (поглощения);  
 $\lambda$  — средняя длина свободного пробега, м;  
 $\nu$  — число молекул, ударяющихся о единичную поверхность в единицу времени,  $1/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  
 $\xi, \eta$  — случайные числа;  
 $\rho$  — плотность газа, кг/м<sup>3</sup>;  
 $\sigma_{\text{м}}$  — диаметр молекулы, м.

## ВВЕДЕНИЕ

Бурное развитие и все более расширяющиеся области применения вакуумного оборудования, например для обеспечения технологических процессов в экспериментальных термоядерных установках, имитаторах космического пространства, ускорителях на встречных пучках, в микроэлектронике, физике твердого тела и других сферах, обуславливают разнообразие и индивидуальность физических и эксплуатационных факторов, увеличивающуюся структурную усложненность, возрастающую ресурсоемкость действующих и в еще большей степени разрабатываемых вакуумных систем. Таким образом, процесс проектирования современных вакуумных систем является сложной и разветвленной задачей, подверженной влиянию многих факторов, характеризующих специфичность и многообразие параметров функционирования вакуумной системы. Поэтому решение подобной задачи требует зачастую индивидуального подхода, так как современные реальные вакуумные системы являются сложными ресурсоемкими комплексами как с технологической, так и с экономической точки зрения и проведение исчерпывающих экспериментальных исследований на этапе проектирования затруднено или невозможно.

В связи с этим особое значение приобретает проведение предварительного анализа системы на этапе проектирования. Целями подобного анализа могут быть: получение предварительных данных о характеристиках агрегата; моделирование рабочих режимов для выявления наиболее ответственных частей проекта; оптимизация агрегата по заданным параметрам; сравнение нескольких альтернативных конструкций и др. Вышеупомянутые причины обуславливают необходимость развития таких идей и методов проектировочных расчетов сложных вакуумных систем, которые, с одной стороны, обладают максимально возможной степенью универсальности, т.е. позволяют строить алгоритмы и продукты на их основе, не требующие доработки для анализа каждой конкретной системы, а с другой стороны, дают возможность учитывать ключевые факторы, оказывающие сущест-

венное влияние на условия функционирования реальной вакуумной системы:

- наличие множественных распределенных источников и стоков газа;
- сильную структурную усложненность;
- наличие сильных температурных перекосов;
- нестационарность протекающих процессов.

Современная ситуация с использованием различных методик и подходов складывается следующим образом. Применение традиционных подходов для анализа реальных сложных вакуумных систем малоэффективно, так как эти подходы базируются на осредненных параметрах состояния разреженного газа и заимствованы из механики сплошных сред. Использование адекватных методов расчета, напротив, ориентировано на построение трехмерных полей дифференциальных характеристик газовой среды (молекулярной концентрации, плотностей молекулярных потоков и др.). Давняя и широкая известность большинства подобных методов анализа сформировала устойчивый стереотип о простоте решения большинства задач, которые могут встать перед проектировщиком вакуумной системы, и соответственно о нецелесообразности дальнейшего развития существующих подходов.

Однако при попытке использовать для анализа конкретной вакуумной системы имеющиеся методы проектировщик сталкивается с их разрозненностью, половинчатостью, а зачастую и незавершенностью, что наряду с наличием чисто практических трудностей в освоении разветвленных и довольно громоздких математических аппаратов этих методов обуславливает сложность их непосредственного использования. Кроме того, увеличивающиеся требования к точности расчетов и к более адекватному описанию процессов, протекающих в вакуумных системах, обуславливают необходимость решения задач в нестационарной постановке, анализа систем со сложной динамически изменяющейся геометрией, находящихся в существенно неравновесных условиях, учета влияния параметров взаимодействия молекул со стенками и др. Также особо актуальным представляется развитие подходов в направлении, позволяющем получать в результате анализа традиционные параметры вакуумных систем, такие как давление, концентрацию и другие, наиболее удобные и привычные для проектировщика в целях более эффективного дальнейшего их использования в работе над проектом.



Наличие вышеозначенных проблем, требующих решения, обусловливает актуальность обобщения имеющихся представлений и выработку на их основе и на базе необходимых модификаций единой максимально универсальной методики для анализа вакуумных систем, ориентированной на решение современных задач, стоящих перед проектировщиком. Отдельной проблемой, также требующей решения, является приведение такой методики к виду, позволяющему создать универсальные программные продукты, которые помогут провести комплексный анализ интегральных и дифференциальных характеристик любой вакуумной системы, причем без участия проектировщика в реализации расчетных алгоритмов.

## Глава 1

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВАКУУМНОЙ ТЕХНИКИ

Главными объектами исследования при анализе вакуумных систем являются параметры разреженного газа, характеризующие его состояние. Разреженный газ близок по своим свойствам к идеальному газу. Идеальными газами принято считать такие, у которых:

- молекулы можно представить как упругие материальные частицы (поэтому часто вместо термина «молекула» используется термин «частица»);
- между частицами происходят только упругие взаимодействия, т.е. отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия;
- объем, занимаемый частицами, пренебрежимо мал по сравнению со свободным объемом.

Одним из основных параметров, характеризующих совокупность молекул внутри объема, является молекулярная концентрация  $n$ ,  $1/\text{м}^3$ , показывающая, сколько частиц (молекул) находится в единице объема системы.

Поведение каждой отдельной молекулы характеризуется ее тепловой скоростью. Максвелл показал, что газ, не подвергающийся какому-либо постороннему механическому или температурному воздействию, всегда приходит в такое состояние, когда молекулы распределяются по скоростям теплового движения по вполне определенному статистическому закону.

Графическая иллюстрация распределения Максвелла показана на рис. 1.1. Здесь приведена качественная зависимость числа молекул, имеющих значение скорости  $v$ , м/с.

На основе этого закона можно подсчитать наиболее вероятную  $v_{н.в} = \sqrt{\frac{2R_0T}{M}} = 129\sqrt{\frac{T}{M}}$ , среднеарифметическую  $v_a = \sqrt{\frac{8R_0T}{\pi M}} = 145,51\sqrt{\frac{T}{M}}$  и среднеквадратичную  $v_{кв} = \sqrt{\frac{3R_0T}{M}} = 158\sqrt{\frac{T}{M}}$  тепловые скорости молекул.

Как видно из зависимостей, параметрами, влияющими на значение тепловой скорости молекулы, являются температура  $T$  и молярная масса  $M$  ( $R_0 = 8,314$  Дж/(К·моль) — универсальная газовая постоянная).

Кроме закона распределения значения скорости в расчетах следует учитывать ее угловое распределение, т.е. определенное соотношение значений компонент скорости. Одним из наиболее распространенных типов углового распределения является диффузный или косинусный закон. При диффузном законе распределения число молекул  $dN_\theta$ , попавших в элементарный телесный угол  $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ , пропорционально  $\cos \theta$ . В общем случае этот закон имеет вид

$$dN_\theta = N d\omega \cos^b \theta, \quad (1.1)$$

где  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности и вектором скорости.

При  $b = 1$  данное соотношение отражает косинусный закон распределения, при  $b = 0$  — равномерное распределение, а при других значениях  $b$  — лепестковый закон углового распределения.

Плотность газа определяется соотношением  $\rho = nm$ , где  $n$  — концентрация молекул,  $1/\text{м}^3$ ;  $m$  — масса молекулы, кг.

Соотношение для расчета значения давления газа, имеющего заданную концентрацию и температуру, следующее из закона Менделеева—Клапейрона  $pV = \frac{m}{M} R_0 T$ , имеет вид

$$p = nkT, \quad (1.2)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана.

Здесь следует указать, что для неравновесных систем понятие давления не отражает полного состояния газа, поскольку при наличии температурных полей становится непонятным, к какой именно температуре относится полученная характеристика. Однако из-за сложившихся традиций термин «давление» активно используется в расчетах. Поэтому для этого удобно использовать понятие «приведенное давление», когда давление характеризует распределение концентрации при одной общей температуре. Следовательно, если, например, внутри системы присутствуют температурные поля, то, рассчитав распределение концентрации молекул внутри нее, можно определить по соотношению (1.2) распределение приведенного к определенной общей (средней) температуре давления.

Хаотическое движение молекул сопровождается не только их соударениями со стенками, но и взаимными столкновениями. Таким

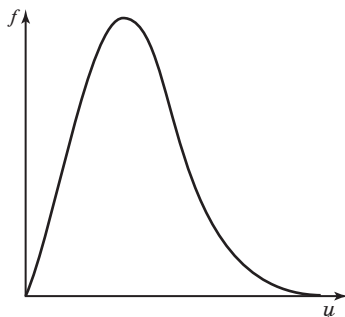


Рис. 1.1. Графическое представление распределения Максвелла

образом, траектория молекулы представляет собой ломаную линию, прямые участки которой характеризуют свободный от столкновений путь. Эти участки не могут быть одинаковы, но, поскольку существует определенный закон распределения, аналогично средней скорости молекул вводится понятие средней длины свободного пробега:

$$\lambda = \frac{kT}{p\pi\sigma^2\sqrt{2}}, \quad (1.3)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура;  $p$  — давление;  $\sigma$  — диаметр молекулы.

Среднюю длину свободного пробега молекулы используют для определения режима течения газа с помощью числа Кнудсена:

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{D}, \quad (1.4)$$

где  $D$  — характерный линейный размер вакуумной системы.

В зависимости от значения числа Кнудсена различают несколько режимов течения газа:

- $\text{Kn} < 0,3$  — вязкостный: характер движения в основном определяется межмолекулярным взаимодействием, влияние стенок вакуумной системы незначительно, газ ведет себя как вязкая жидкость; для анализа с достаточной степенью точности применимы законы гидродинамики;
- $\text{Kn} > 5$  — свободномолекулярный: движение газа представляет собой независимое перемещение молекул, претерпевающих только соударения со стенками вакуумной системы;
- $0,3 < \text{Kn} < 5$  — переходный: движение газа характеризуется столкновениями обоих типов.

Поскольку основными характеристиками, определяемыми при анализе вакуумной системы, являются параметры, характеризующие поведение газовых потоков, важное значение имеет число молекул, ударяющихся о единичную поверхность в единицу времени  $\nu$ ,  $1/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ :

$$\nu = \frac{nv_a}{4}. \quad (1.5)$$

Соответственно «объем» молекул, ударяющихся о единичную поверхность в единицу времени,  $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ,

$$V_0 = \frac{\nu}{n} = \frac{v_a}{4}. \quad (1.6)$$

При перетекании газа из одного бесконечно большого объема с давлением  $p_1$ , Па, в другой с давлением  $p_2$ , Па, через малое отверстие или диафрагму с идеально тонкими стенками молекулярный поток определяется соотношением

$$Q_{\text{отв}} = V_0 F_{\text{отв}} = \frac{v_a F_{\text{отв}}}{4} (p_1 - p_2), \quad (1.7)$$

где  $F_{\text{отв}}$  — площадь сечения отверстия,  $\text{м}^2$ .

Из соотношения (1.7) вытекает зависимость для определения пропускной способности (проводимости) отверстия или диафрагмы с идеально тонкими стенками:

$$U_{\text{отв}} = \frac{v_a F_{\text{отв}}}{4}. \quad (1.8)$$

Одним из важнейших элементов системы понятий вакуумной техники, основанной на традиционном подходе к расчету и проектированию вакуумных систем, является быстрота действия насоса  $S_n$ ,  $\text{м}^3/\text{с}$ . Быстрота действия насоса определяет объем газа, проходящего через входное сечение в направлении откачки за единицу времени.

Аналогичная характеристика, отнесенная к объекту откачки, — быстрота откачки  $S$ ,  $\text{м}^3/\text{с}$ , в некотором сечении — газовый поток, протекающий в этом сечении, отнесенный к давлению в том же сечении:

$$S = \frac{Q}{p}. \quad (1.9)$$

Количественная связь между потоком газа, проходящим через сечение некоторого канала вакуумной системы, в котором существует давление  $p$ , и давлениями во входном  $p_1$  и выходном  $p_2$  его сечениях выражается зависимостью:

$$Q = U(p_1 - p_2). \quad (1.10)$$

В терминах механики сплошных сред уравнение (1.10) выражает условие неразрывности газового потока. Из него следует основное уравнение вакуумной техники:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{U}. \quad (1.11)$$

Представленные характеристики являются базисными параметрами традиционной системы понятий вакуумной техники и активно используются при анализе вакуумных систем. В рассматриваемой системе понятий все статические и динамические характеристики выражаются через осредненные параметры состояния разреженного газа, поэтому, строго говоря, применимы при условиях равновесности вакуумной системы.

Это ограничение снимается при развитии системы понятий до уровня, допускающего использование дифференциальных и интегральных характеристик, описывающих с использованием статистически детерминированных констант процессы локальных взаимодействий молекулы с элементами вакуумной системы. Наиболее часто используются следующие параметры:

- коэффициент прилипания — дифференциальная характеристика, определяющая вероятность длительного удержания поверхностью вакуумной системы упавшей на нее молекулы. Нужно отметить, что схожий статистический смысл имеют другие коэффициенты, отражающие лишь отличающиеся процессы взаимодействия, например коэффициент конденсации, коэффициент сорбции;
- коэффициент проводимости — интегральная характеристика, определяющая среднюю для совокупности молекул вероятность пролета от входного до выходного сечения некоей проводящей системы. При условиях диффузного отражения и состояния равновесия в системе коэффициент проводимости численно равен коэффициенту Клаузинга;
- коэффициент захвата — интегральная характеристика, определяющая среднюю для совокупности молекул вероятность быть поглощенными элементом вакуумной системы.

Принципиальной особенностью интегральных характеристик является универсальность даваемого ими описания элементов вакуумной системы. Кроме того, безразмерность и относительность этих параметров дает возможность использовать их для анализа практически любых вакуумных систем независимо от режима течения газа, степени сложности и равновесности вакуумной системы.

Также эти характеристики делают возможным построение на базе формулирования систем интегрально-дифференциальных уравнений математических моделей элементов и вакуумных систем в целом, что позволяет осуществлять их структурно-параметрическую оптимизацию.

## Глава 2

# МЕТОДЫ РАСЧЕТА

### 2.1. ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА

Выбор методики для анализа вакуумной системы определяется, с одной стороны, факторами, характеризующими эту вакуумную систему и условия ее функционирования, а с другой — условиями, накладываемыми на качество и достоверность результатов, которые планируется получить.

Существуют несколько уровней описания процессов, протекающих в разреженном газе, и ряд соответствующих им методов и подходов, в рамках которых реализуется замкнутая система понятий, описывающих состояние разреженного газа и интегральные характеристики вакуумных систем.

Существующие методы и подходы можно условно разделить на две основные части: аналитические и численные. Под аналитическими методами подразумеваются так называемые традиционные подходы к анализу вакуумных систем, получившие развитие в первой половине прошлого века и базирующиеся на осредненных параметрах состояния разреженного газа и на связанной с этой предпосылкой системе допущений. Модели аналитических методов относительно просты и пригодны для непосредственного использования проектировщиком. Под численными методами понимаются подходы, требующие большого объема вычислений, причем возможность применения этих методов зачастую напрямую связана с количеством вычислительных ресурсов. Развитию численных методов способствовало увеличение мощности и совершенствование вычислительной техники во второй половине прошлого века. Необходимо отметить, что численные методы зачастую являются комбинированными и при их применении активно используются известные аналитические соотношения для представления результата.

Далее рассмотрим основные имеющиеся подходы, которые наиболее широко применяются при анализе вакуумных систем, с точки зрения целесообразности и эффективности использования этих подходов в реальных актуальных задачах проектирования и оптимизации.

**Классические аналитические методы.** Одной из наиболее распространенных задач, встающих перед разработчиком вакуумных систем, является определение проводимости (сопротивления) трубопровода. Поиску корректных методов вычисления этих величин посвящена, пожалуй, большая часть публикаций по вакуумной технике. По-видимому, этот поиск дал решающий толчок серии классических исследований М. Кнудсена, М. Смолуховского и П. Клаузинга. Результаты этих и ряда других классических исследований широко известны, поэтому здесь остановимся лишь на основных этапах, наиболее полно характеризующих процесс формирования и развития различных теорий и воззрений на пути анализа вакуумных систем.

Одной из простейших методик анализа вакуумных систем является теория сосредоточенных параметров, в рамках которой состояние разреженного газа описывают термодинамически, принимая, что его параметры связаны между собой уравнением состояния идеального газа. Данная теория определяет такие базовые понятия вакуумной техники, как проводимость, сопротивление и быстрота действия. Согласно этой теории основная часть расчетов базируется на записи интегральных балансовых уравнений сохранения. В рамках этого подхода были выработаны основные соотношения для расчетов суммарных проводимости и сопротивления сложных составных вакуумных систем, а также основное уравнение вакуумной техники, устанавливающее связь между быстротой действия насоса  $S_n$ , присоединенного к откачиваемому объему через патрубок, имеющий проводимость  $U$ , и эффективной быстротой откачки рассматриваемого объема  $S_{эф}$ :

$$\frac{1}{S_{эф}} = \frac{1}{S_n} + \frac{1}{U}.$$

Развитием данного подхода занимался С. Дэшман, выдвинувший гипотезу об аналогии процессов течения разреженного газа в каналах и тока в электрических цепях и предложивший известное соотношение для расчета суммарной проводимости составного трубопровода  $U_{\Sigma}$ :

$$\frac{1}{U_{\Sigma}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{U_i}.$$

Данное соотношение, однако, не учитывает так называемый «пучковый эффект», когда параметры газового потока на входе в каждую следующую часть формируются предыдущей частью и структура потока приобретает значительную продольную составляющую. В результате этого эффекта параметры потока на входе в каждую следующую часть существенно отличаются от условий диффузного напуска.



Определенную коррекцию в соотношение, предложенное С. Дэшманом, внес К. Оутли. Основным понятием его теории является вероятность прохождения молекулы газа через данный элемент. При соединении двух трубопроводов одинакового радиуса и разной длины, имеющих проводимости  $U_1$  и  $U_2$ , результирующая проводимость  $U_\Sigma$  всей системы в целом определяется как

$$\frac{1}{U_\Sigma} = \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} - 1.$$

В. Штекельмахер отмечал, что подход К. Оутли по результативности аналогичен подходу С. Дэшмана.

Вышеупомянутые подходы рассматривают задачу определения проводимости канала в стационарной постановке. Процесс нестационарной откачки некоторого объема с учетом зависимости проводимости патрубка от давления исследовал Г.А. Тягунов. Кроме того, он впервые описал влияние изменения температуры газа на процесс откачки и внес фундаментальный вклад в развитие классических подходов в приложении к сложным трубопроводам.

Другую теорию течения разреженного газа через канал предложил М. Кнудсен. Среди основных предпосылок его теории можно назвать следующие: молекулярный поток на поверхность формируется и определяется параметрами газовой среды в рассматриваемом элементарном объеме; поведение газа описывается в терминах механики сплошных сред; при рассмотрении процессов взаимодействия молекулы со стенками не учитываются температура стенки (изотермическая система), возможность поглощения или миграции молекулы по поверхности. В рамках разработанной теории М. Кнудсеном были получены приближенные соотношения для расчета проводимости протяженного канала круглого сечения, позднее подтвержденные М. Смолуховским, который на основе подхода М. Кнудсена при более строгом рассмотрении процесса течения разреженного газа получил соотношения для расчета проводимости протяженного канала произвольного сечения.

Благодаря простому математическому аппарату теория М. Кнудсена нашла широкое применение в качестве базиса для развития аналитических подходов для анализа молекулярных течений.

Следующим этапом развития теоретических основ расчета вакуумных систем стала теория П. Клаузинга. Главным новшеством теории П. Клаузинга стал полный отказ от попытки увязать плотность падающего потока молекул на фрагмент поверхности системы с локальными характеристиками газовой среды в прилегающем объеме. Следуя П. Клаузингу, поток молекул  $Q_{тр}$ , вылетающих через выходное

сечение канала, можно выразить через поток молекул  $Q_{\text{отв}}$ , влетающих в его входное отверстие, т.е.

$$Q_{\text{тр}} = k_{\text{кл}} Q_{\text{отв}}.$$

Данный подход развивал также и С. Дэшман, однако П. Клаузинг дал коэффициенту пропорциональности  $k_{\text{кл}}$  ясное физическое толкование и вычислил его для труб круглого и прямоугольного сечений. В рамках теории П. Клаузинга стал ясно виден ряд принципиальных моментов: поток через трубопровод не зависит от температуры его стенок, а зависит только от температуры газа на входе в трубопровод; на поток через канал влияют лишь геометрические характеристики канала и параметры взаимодействия молекул со стенками — физическая модель рассеяния и характеристики поверхности с точки зрения возможности поглощения (захвата) молекул.

Как уже отмечалось, П. Клаузинг внес существенный вклад в чисто практическую область проведения вакуумных расчетов: обосновал диффузный (косинусный) закон отражения молекул от стенки, получил соотношения для расчета проводимости канала произвольной длины и разных типов поперечного сечения, одним из первых применил законы молекулярного течения газов к расчету оптической задачи, а при расчете молекулярных потоков использовал законы оптики и др.

Методика П. Клаузинга получила широкое использование для расчетов проводимостей каналов, а заложенные в нее предпосылки позволили рассматривать этот подход в качестве начального этапа для развития единой универсальной методики для анализа сложных вакуумных систем. Подход П. Клаузинга для анализа вакуумных систем получил интенсивное развитие в работах Г.Л. Саксаганского [1], Ю.А. Рыжова, Ю.А. Кошмарова и др.

**Развитие аналитических подходов в приложении к актуальным задачам вакуумной техники.** Расширение области применения вакуумной техники ощутимо увеличило спектр актуальных задач, решение которых, с одной стороны, может быть найдено в рамках имеющихся классических подходов и воззрений, а с другой — требует существенного развития и совершенствования используемых при этом методов. Наиболее простым и очевидным выходом из ситуации, когда классические подходы формулируют необходимые предпосылки, но не дают конкретных методик, применимых для расчета систем с усложняющейся геометрией или для решения новых возникающих задач, таких как определение профилей наможенного слоя конденсата и других, является развитие аналитических методов расчета.

Развитие и совершенствование аналитических методик для анализа вакуумных систем в приложении к задачам, отличным от расчета проводимости трубопроводов, происходило параллельно с возникновением необходимости формирования подходов, пригодных для проектирования вакуумных систем. Основными требованиями, предъявляемыми к подобным методам, были простота и прозрачность математических моделей, которые не вынуждают проектировщика длительно осваивать метод, а позволяют непосредственно использовать его для решения поставленной задачи и, при необходимости, самостоятельно развивать и совершенствовать.

Одно из решений данной проблемы предложил Д.В. Быков, разработавший простой и легко расширяемый и развиваемый аналитический метод, позволяющий проводить оценочные расчеты интегральных характеристик вакуумных систем, гораздо более сложных, чем трубопроводы.

Развитие аналитических методов анализа вакуумных систем шло не только в направлении углубления и усложнения постановки традиционных задач вакуумной техники, таких как определение интегральных характеристик вакуумных систем, но и в направлении расширения спектра решаемых задач. С развитием криовакуумной техники актуальным стало изучение структуры намораживаемого слоя конденсата. А.М. Макаров сформулировал метод, позволяющий определять структуру замороженного слоя сконденсированного газа на криопанелях для различных типов источников напуска газа и геометрических характеристик системы. Полученные им соотношения позволяют быстро и без использования сложного математического аппарата получать информацию о структуре накопленного слоя.

Различные аналитические методы продолжают развиваться, поскольку сочетают в себе простоту применения и необходимую для оценочных расчетов точность.

**Метод угловых коэффициентов.** Одним из наиболее детально развитых подходов, получивших широкое распространение в расчетах вакуумных систем и выделившихся в отдельную методику, является метод угловых коэффициентов или метод лучистой аналогии.

Как следует из названия, он строится на аналогии между закономерностями течения газа в системах с диффузно отражающими стенками и лучистого теплообмена в диатермических замкнутых средах. Данный метод строится на использовании базового понятия углового коэффициента, который выражает собой долю потока, диффузно эмитируемого с одного элементарного фрагмента поверхности (или с поверхности в целом) и падающего на другой элементарный фрагмент

поверхности (или на другую поверхность в целом). Значения угловых коэффициентов зависят от взаимного расположения и типов поверхностей, составляющих анализируемую систему. После определения значений угловых коэффициентов с использованием параметров, характеризующих взаимодействие газа с поверхностью (коэффициенты поглощения или прилипания и отражения), находятся значения потоков с поверхности на поверхность, которые, в свою очередь, позволяют определять интегральные характеристики системы — проводимость, быстроту действия и т. п.

В применении к расчетам молекулярных потоков в вакуумных системах метод угловых коэффициентов активно развивали и распространяли Г.Л. Саксаганский, А.Д. Савельев, Л.С. Гуревич, С.Р. Галимов. Кроме того, метод угловых коэффициентов также широко используется при решении задач лучистого теплообмена в вакуумных системах. Особую актуальность эти задачи приобрели в контексте криовакуумных систем. Развитием метода угловых коэффициентов для анализа теплообмена излучением в приложении к задачам криовакуумной техники занимался Ю.А. Суринов.

Метод угловых коэффициентов относительно прост в применении. Он позволяет проводить анализ структурно сложной системы с достаточно высокой степенью достоверности. Математический аппарат этого метода разработан настолько детально, что позволяет говорить об «алгебре» угловых коэффициентов («поточной алгебре») как о самостоятельном разделе общей теории теплообмена излучением. Большое число всевозможных таблиц, в которых приведены соотношения для определения угловых коэффициентов для множества комбинаций различных типов поверхностей, и широкие возможности для их расширения и дополнения послужили причиной распространения этого подхода в качестве одного из основных аналитических методов расчета вакуумных систем, применяемых в проектно-конструкторской практике.

**Метод эквивалентных поверхностей.** Особняком от других методов и подходов к анализу вакуумных систем стоит метод эквивалентных поверхностей. Данный подход не является методом анализа в непосредственном понимании, он представляет собой методику, органично дополняющую практически любой метод анализа, описываемый в данном параграфе. Суть этой методики сводится к замене сложного фрагмента вакуумной системы на некоторую поверхность, характеристики которой эквивалентны характеристикам всего фрагмента. С одной стороны, анализируемая структура существенно упрощается, а с другой — драматической потери точности результата не происходит, так как эквивалентная поверхность определяется как

газокинетическая копия сложного фрагмента. При этом подобная схема анализа допускает и, более того, предполагает дальнейшую детализацию расчетов.

Использование данного подхода в качестве универсального дополнения практически к любому методу анализа было предложено и активно развивалось Г.Л. Саксаганским [1] и Б.Д. Ершовым.

**Метод анализа газовых потоков путем решения кинетического уравнения Л. Больцмана.** Одним из наиболее строгих и общих подходов к анализу течений разреженного газа в вакуумных системах является метод, состоящий в использовании кинетического уравнения Л. Больцмана. Данное уравнение было выведено Л. Больцманом в 1872 г. Оно устанавливает взаимосвязь между скоростями молекул до столкновения и после него.

Использование кинетического уравнения Л. Больцмана для анализа процессов течения разреженного газа является настолько всеобъемлющим и универсальным подходом, что для него разработаны как аналитические, так и численные методики, позволяющие использовать богатый математический аппарат на разных уровнях детализации анализируемой системы. Среди главных достоинств этого метода следует отметить возможность его применения для анализа молекулярных потоков в любом режиме течения — свободномолекулярном, переходном, сплошном.

К методикам, допускающим аналитическое решение уравнения Л. Больцмана, следует отнести моментный метод, рассмотренный М.Н. Коганом, суть которого сводится к замене уравнения Л. Больцмана системой моментных уравнений. При этом уравнению Л. Больцмана соответствует система бесконечного числа моментных уравнений, поэтому степень достоверности решения прямо связана с числом уравнений. Существенный вклад в развитие данного подхода при анализе газовых потоков внес Д.А. Лабунцов, получивший аналитические решения задачи в линейной постановке для шести- и восьми-моментного приближений.

Большая часть подходов к решению кинетического уравнения Л. Больцмана опирается на использование численных методик. В этом направлении метод использования кинетического уравнения для анализа газовых потоков развивается особенно бурно. Среди наиболее широко известных следует отметить метод прямого статистического моделирования, суть которого сводится к представлению реальных физических процессов, происходящих с молекулами газа, в виде вероятностных моделей и статистическому анализу множества моделируемых процессов, и метод прямого численного решения кинетического урав-

нения Л. Больцмана, использование которого наиболее физически обосновано. Большой вклад в развитие численных методов для решения уравнения Л. Больцмана внесли Ф.Г. Черемисин и А.П. Крюков.

К сожалению, при современном уровне развития вычислительной техники широкое применение методов анализа вакуумных систем на основе решения кинетического уравнения Л. Больцмана ограничивается лишь простыми моделями рассчитываемых структур. Однако непрекращающееся развитие вычислительной мощности компьютеров вкупе с постоянным совершенствованием численных алгоритмов позволяют говорить о данном подходе как об одном из самых перспективных и универсальных методов анализа вакуумных систем.

**Метод Монте-Карло пробной частицы.** Метод Монте-Карло (далее ММК), называемый также методом статистических испытаний, является численным методом решения математических и физических задач путем моделирования характерной случайной величины. Метод Монте-Карло был предложен в 1949 г. американскими математиками Н. Метрополисом и С. Уламом и изначально нашел применение в рассмотрении проблемы ослабления нейтронного излучения с помощью решения кинетических уравнений, расчета интегралов и др. Теоретическое обоснование и вопросы прикладного применения ММК рассматривались И.М. Соболев, С.М. Ермаковым и др.

Одним из вариантов метода Монте-Карло, который используют для расчетов вакуумных систем, является метод пробной частицы, состоящий в моделировании движения молекул и статистической оценке результатов этого моделирования. Так как движение отдельных молекул газа подчинено законам статистической физики и носит случайный характер, ММК, как отмечал Г.Л. Саксаганский, «...полностью адекватен физической природе молекулярного переноса». С помощью метода пробной частицы анализируются различные параметры молекулярных течений внутри системы с заданными геометрией и условиями взаимодействия с поверхностями рассматриваемой системы. Метод пробной частицы используется при анализе молекулярных потоков, для которых выполняется допущение о свободномолекулярном режиме течения. Так как молекулы не сталкиваются между собой, алгоритм расчета строится таким образом, что частицы запускаются в систему по очереди и следующая запускается после того, как закончила полет предыдущая. На самом деле происходит многократный запуск одной и той же частицы, но поскольку параметры запуска и полета моделируются случайно, то считается, что все анализируемые варианты принадлежат разным частицам. Важное значение в расчетах методом пробной частицы играет датчик случайных чисел. Он должен генерировать случайное число, равно-

мерно распределенное в заданных пределах. Стандартные датчики, предоставляемые в различных языках программирования, показывают удовлетворительные результаты и вполне пригодны для использования. В описанных ниже расчетах применяется датчик, генерирующий случайное число, равномерно распределенное на отрезке от 0 до 1. Учет и накопление параметров полета, необходимых для анализа, ведутся индивидуально для каждой частицы. После окончания запуска всех частиц проводятся анализ и статистическая оценка накопленных данных.

Впервые метод пробной частицы использовался в 1958 г. Л. Левенсон, Н. Миллерон и Д. Дэвис [5] на основе метода пробной частицы рассчитывали проводимости цилиндрической трубки, ловушки, колена и др.

В дальнейшем метод пробной частицы активно применялся для анализа интегральных характеристик различных вакуумных систем. Д. Дэвисом и В. де Маркусом на основе метода пробной частицы было исследовано влияние шероховатости стенок трубопровода на его проводимость; причем шероховатость моделировалась регулярной структурой. Как показано в известном обзоре В. Штекельмахера, при данном исследовании получено совпадение рассчитанных значений проводимости с экспериментальными данными по шероховатым трубопроводам с отклонением в 5 %, и поэтому направление исследования влияния шероховатости было названо одной из многообещающих областей применения ММК.

В качестве одного из недостатков метода пробной частицы обычно отмечают невозможность получения непосредственных физических характеристик газовой среды, таких как давление, распределение плотности концентрации и др. Однако первые шаги в этом направлении делались уже давно. Так, в 1967 г. Е. Фишер и Х. Моммсен [2] для разработки стандартов испытательных камер для исследования параметров насосов осуществляли расчеты распределения давления в пристеночной области с помощью ММК. Подход, использованный ими, основывался на определении распределения давления через число соударений частиц со стенкой.

Существенный вклад в развитие метода пробной частицы внесли Г.Л. Саксаганский [1], Л.Н. Розанов, А.М. Кислов. Л.Н. Розанов использовал метод пробной частицы для расчетов проводимостей сложных систем, таких как вакуумные ловушки, системы с произвольным числом входов. А.М. Кислов развивал применение ММК в области расчетов криогенных вакуумных систем. Кроме того, он показал, как можно определить значение молекулярной концентрации внутри структурно-сложной системы на основе анализа времени жизни молекулы в вакуумной системе.

К сожалению, развитие ММК тесно связано с развитием вычислительной техники и увеличением вычислительных ресурсов. Поэтому большая часть разработанных ранее алгоритмов имела вынужденные ограничения по времени, связанные с уменьшением потребляемых вычислительных ресурсов, и достоверность этих алгоритмов, естественно, снижалась. Кроме того, степень достоверности ММК зависит от числа пробных частиц  $N$ , что вкуче с отмечаемой многими исследователями медленной сходимостью метода и увеличивающимся объемом вычислений с повышением сложности анализируемой системы затрудняло проведение высокоточных расчетов.

Однако современный уровень вычислительной техники таков, что позволяет разрабатывать алгоритмы, лишенные ограничений, связанных с экономией вычислительных ресурсов, и развивать методы вычислений в направлении получения физических характеристик газовой среды. Заметный вклад в этом направлении внес Ю. Сутсугу [3], который предложил метод вычисления пространственного распределения давления в сложной вакуумной системе. К сожалению, подходы как Е. Фишера и Х. Моммсена, так и Ю. Сутсугу оперируют с давлением, а данная категория, строго говоря, некорректна при анализе неравновесных систем. В данном контексте правильнее говорить о молекулярной концентрации.

В настоящий момент с развитием метода пробной частицы в приложении к решению актуальных задач вакуумной техники сложилась следующая ситуация. Основная часть публикаций относится к периоду с начала 60-х до конца 70-х годов прошлого века. При этом с начала 80-х годов и практически до настоящего времени образовался некоторый пробел. По-видимому, эта ситуация объясняется тем, что работы, выполненные ранее, фактически полностью израсходовали тот вычислительный потенциал, который был доступен в конце 70-х годов, т.е. развитие метода пробной частицы в приложении к актуальным задачам как бы остановилось из-за объективных ограничений имеющихся вычислительных ресурсов.

Бурное развитие вычислительной техники в последнее десятилетие и качественно увеличившийся уровень имеющихся вычислительных ресурсов вкуче с существенно повышающимися требованиями к степени детализации описания и решения современных актуальных задач вакуумной техники обусловили начало нового этапа развития метода пробной частицы. Особую актуальность имеет развитие метода в направлении, позволяющем проводить анализ сколь угодно сложной системы и получать в результате традиционные параметры вакуумных систем, такие как давление, концентрация и другие, наиболее удобные и привычные для проектировщика в целях эффективного дальнейшего их использования в работе над проектом.



Метод пробной частицы является одним из самых оптимальных, а в определенных ситуациях единственным подходом, поскольку обладает относительно невысокой требовательностью к вычислительным ресурсам и при этом имеет потенциал для проведения с его помощью анализа вакуумных систем любой степени сложности, в том числе находящихся в неравновесных условиях, с учетом нестационарности протекающих процессов и других факторов, определяющих параметры функционирования реальных вакуумных систем. Единственным ограничением применения метода пробной частицы в данном направлении является малая развитость соответствующих методик и подходов.

Современный уровень вычислительных ресурсов, практически никак не ограничивающий развитие метода пробной частицы, с одной стороны, и требуемая актуальными задачами вакуумной техники степень детализации их описания и решения, с другой — обуславливают необходимость дальнейшего развития данного метода с целью ответа на животрепещущие вопросы, которые стоят перед проектировщиками реальных вакуумных систем. Данная работа призвана обобщить, упорядочить и дополнить имеющиеся наработки в области применения метода пробной частицы для анализа сложных вакуумных систем и пролить свет на современные вопросы, встающие перед проектировщиком при решении актуальных задач вакуумной техники.

## 2.2. МЕТОД УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

### 2.2.1. Основные понятия

Проводимости вакуумных систем в целом и их элементов (клапанов, затворов, участков трубопроводов), коэффициенты захвата различных устройств (насосов, ловушек и др.), а также распределение молекул по поверхностям вакуумной системы или отдельных ее участков можно рассчитать с помощью угловых коэффициентов, используемых для определения теплообмена излучением.

В общем случае элементарную площадку площадью  $dF_i$  поверхности площадью  $F_i$  (далее поверхность  $F_i$ ) вакуумной системы покидает поток молекул, плотность которого

$$q_i = q_{0i} + (1 - \gamma)q'_i, \quad (2.1)$$

где  $q_{0i}$  — плотность потока молекул, испускаемых элементарной площадкой  $dF_i$  (например, в результате газовой выделенности поверхности);  $\gamma$  — коэффициент поглощения молекул газа площадкой  $dF_i$ ;  $q'_i$  — плотность потока молекул, падающих на площадку  $dF_i$ .

На элементарную площадку  $dF_i$  падает поток молекул со всех поверхностей вакуумной системы, видимых из центра площадки и образующих замкнутую систему. Полная плотность падающего потока

$$q'_i dF_i = \int_{\Sigma F_j} q_j d\varphi_{dF_j-dF_i} dF_j, \quad (2.2)$$

где  $q_j$  — плотность потока молекул, покидающих площадку  $dF_j$ ;  $d\varphi_{dF_j-dF_i}$  — вероятность попадания молекул газа с элементарной площадки  $dF_j$  поверхности  $F_j$  на площадку  $dF_i$  поверхности  $F_i$ .

Вероятность  $d\varphi_{dF_j-dF_i}$  зависит от закона отражения и испускания частиц поверхностью и взаимной ориентации площадок. Величина  $d\varphi_{dF_j-dF_i}$  называется дифференциальным или элементарным угловым коэффициентом, и в случае диффузного закона отражения

$$d\varphi_{dF_j-dF_i} = \frac{\cos \psi_j \cos \psi_i}{\pi r^2} dF_i, \quad (2.3)$$

где  $\psi_j$  — угол между нормалью к площадке  $dF_j$  и линией, соединяющей центры площадок  $dF_i$  и  $dF_j$ ;  $\psi_i$  — угол между нормалью к площадке  $dF_i$  и линией, соединяющей центры площадок  $dF_i$  и  $dF_j$ ;  $r$  — расстояние между центрами площадок  $dF_i$  и  $dF_j$ .

Вероятность  $d\varphi_{dF_j-dF_i}$  попадания молекул газа с элементарной площадки  $dF_j$  на всю поверхность площадью  $F_i$  называют локальным угловым коэффициентом:

$$d\varphi_{dF_j-F_i} = \int_{F_i} d\varphi_{dF_j-dF_i} = \int_{F_i} \frac{\cos \psi_i \cos \psi_j}{\pi r^2} dF_i. \quad (2.4)$$

Вероятность  $\varphi_{F_j-F_i}$  попадания молекул газа с поверхности  $F_j$  на поверхность  $F_i$  при постоянстве  $q_j$  по всей поверхности  $F_j$  называют средним угловым коэффициентом:

$$\varphi_{F_j-F_i} = \frac{1}{F_j} \int_{F_j} dF_j \int_{F_i} \frac{\cos \psi_i \cos \psi_j}{\pi r^2} dF_i. \quad (2.5)$$

Угловые коэффициенты обладают свойствами:

замкнутости:  $\sum_{i=1}^n \varphi_{F_j-F_i} = 1,$

взаимности:  $\varphi_{F_j-F_i} F_j = \varphi_{F_i-F_j} F_i,$

аддитивности:  $\varphi_{F_j-F_i} = \sum_{k=1}^n \varphi_{F_j-F_{ik}}, \quad F_i = \sum_{k=1}^n F_{ik}.$

Свойство аддитивности угловых коэффициентов заключается в том, что угловой коэффициент  $\varphi_{F_j-F_i}$  между поверхностями  $F_j$  и  $F_i$  равен сумме коэффициентов  $\varphi_{F_j-F_{ik}}$  между поверхностью  $F_j$  и всеми частями  $F_{ik}$  поверхности  $F_i$ , из которых она состоит.

### 2.2.2. Расчет угловых коэффициентов

Угловой коэффициент является основной расчетной величиной. Он может быть найден аналитическим, графоаналитическим методами, методом поточной алгебры и численно с помощью ЭВМ. Первые три метода изложены в [1, 4]. Рассмотрим подробно аналитический метод определения угловых коэффициентов.

Аналитический метод основан на непосредственном интегрировании математического выражения для элементарного углового коэффициента. Рассмотрим в качестве примера систему, приведенную на рис. 2.1, если тела имеют диффузное отражение.

Найдем значения величин, входящих в зависимость  $d\varphi_{dF_1-dF_2} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2$ . Эти величины определяются следующим образом:

$$r^2 = s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha; \cos \psi_1 = \frac{a + R \cos \alpha}{r}; \cos \psi_2 = \frac{s}{r}; dF_2 = R dR d\alpha.$$

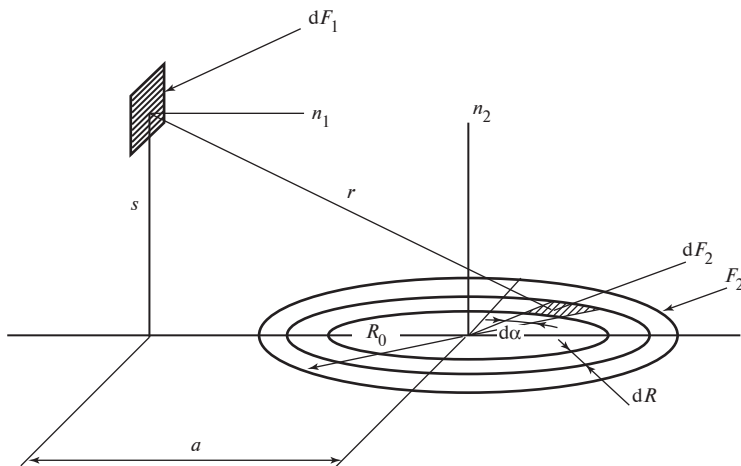


Рис. 2.1. Элемент плоскости и перпендикулярный ему круглый диск

Тогда

$$d\varphi_{dF_1-dF_2} = \frac{\cos \psi_2 \cos \psi_1}{\pi r^2} dF_2 = \frac{s(a + R \cos \alpha) R dR d\alpha}{\pi(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2};$$

$$d\varphi_{dF_1-F_2} = \int_{F_2} d\varphi_{dF_1-dF_2} = \frac{s}{\pi} \int_0^{R_0} R dR \int_0^\pi \frac{a + R \cos \alpha}{(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2} d\alpha. \quad (2.6)$$

Вычислим интеграл  $\int_0^\pi \frac{a + R \cos \alpha}{(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2} d\alpha =$

$$= \frac{R}{4a^2 R^2} \int_0^\pi \frac{a/R + \cos \alpha}{((s^2 + a^2 + R^2)/(2aR) + \cos \alpha)^2} d\alpha.$$

При  $m_1 = \frac{a}{R}, \quad m_2 = \frac{s^2 + a^2 + R^2}{2aR}, \quad m_3 = \frac{1}{4a^2 R} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t,$

$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\alpha = 2 \frac{dt}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$  полученное выраже-

ние можно записать как  $m_3 \int_0^\infty \frac{m_1 + (1-t^2)/(1+t^2)}{(m_2 + (1-t^2)/(1+t^2))^2} \frac{2 dt}{1+t^2} =$

$$= 2m_3 \int_0^\infty \frac{t^2(m_1-1) + (m_1+1)}{(t^2(m_2-1) + (m_2+1))^2} dt =$$

$$= 2m_3 \frac{(m_1-1)}{(m_2-1)^2} \int_0^\infty \frac{t^2 + (m_1+1)/(m_1-1)}{(t^2 + (m_2+1)/(m_2-1))^2} dt.$$

Пусть  $n_1 = \frac{m_1+1}{m_1-1}, \quad n_2 = \frac{m_2+1}{m_2-1}$ , тогда будем иметь

$$2m_3 \frac{(m_1-1)}{(m_2-1)^2} \int_0^\infty \frac{t^2 + n_1}{(t^2 + n_2)^2} dt = 2m_3 \frac{(m_1-1)}{(m_2-1)^2} \int_0^\infty \frac{t^2 + n_2 + n_1 - n_2}{(t^2 + n_2)^2} dt =$$

$$= 2m_3 \frac{(m_1-1)}{(m_2-1)^2} \left[ \underbrace{\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + n_2)}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{n_1 - n_2}{(t^2 + n_2)^2} dt}_{I_2} \right].$$

Далее обозначим первый интеграл последнего выражения через  $I_1$ , а второй — через  $I_2$ . Для вычисления интеграла  $I_2$  воспользуемся рекуррентной формулой  $I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$ .

Получим

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + n_2)^2} = \frac{1}{2n_2} \frac{t}{(t^2 + n_2)^2} + \frac{1}{2n_2} I_1; I_1 = \frac{1}{\sqrt{n_2}} \arctg \left( \frac{t}{\sqrt{n_2}} \right).$$

С учетом полученных соотношений продолжим вычисления:

$$\begin{aligned} 2m_3 \frac{(m_1 - 1)}{(m_2 - 1)^2} [I_1 + (n_1 - n_2)I_2] &= 2m_3 \frac{(m_1 - 1)}{(m_2 - 1)^2} \left[ I_1 + (n_1 - n_2) \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{1}{2n_2} \frac{t}{(t^2 + n_2)} + \frac{1}{2n_2} I_1 \right) \right] = 2m_3 \frac{(m_1 - 1)}{(m_2 - 1)^2} \left[ \frac{(n_1 - n_2)t}{2n_2(t^2 + n_2)} + \right. \\ &+ \left. \left( 1 + \frac{n_1 - n_2}{2n_2} \right) \frac{1}{\sqrt{n_2}} \arctg \left( \frac{t}{\sqrt{n_2}} \right) \right] \Bigg|_0^\infty = \pi m_3 \frac{(m_1 - 1)}{(m_2 - 1)^2 \sqrt{n_2}} \left( \frac{n_1 + n_2}{2n_2} \right) = \\ &= \pi m_3 \frac{(m_1 - 1)}{(m_2 - 1)^2 \sqrt{(m_2 + 1)/(m_2 - 1)}} \cdot \frac{(m_1 + 1)/(m_1 - 1) + (m_2 + 1)/(m_1 - 1)}{2(m_2 + 1)/(m_2 - 1)}. \end{aligned}$$

После преобразования будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{a + R \cos \alpha}{(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR \cos \alpha)^2} d\alpha = \\ &= \frac{\pi m_3}{2\sqrt{(m_2 - 1)(m_2 + 1)}} \frac{(m_1 + 1)(m_2 - 1) + (m_2 + 1)(m_1 - 1)}{(m_2 + 1)(m_2 - 1)}. \end{aligned}$$

Обозначив через  $V_1$  и  $V_2$  соответственные члены последнего выражения, проведем вычисления далее:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi m_3}{2\sqrt{(m_2 - 1)(m_2 + 1)}} = \frac{\pi/(4a^2 R)}{2 \sqrt{\left( \frac{s^2 + a^2 + R^2}{2aR} - 1 \right) \left( \frac{s^2 + a^2 + R^2}{2aR} + 1 \right)}} = \\ &= \frac{\pi}{4a\sqrt{(s^2 + a^2 + R^2 - 2aR)(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR)}} = \\ &= \frac{\pi}{4a\sqrt{(s^2 + a^2 + R^2)^2 - 4a^2 R^2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{(m_1 + 1)(m_2 - 1) + (m_2 + 1)(m_1 - 1)}{(m_2 + 1)(m_2 - 1)} = \\
&= \frac{\left(\frac{a}{R} + 1\right) \left(\frac{s^2 + a^2 + R^2 - 2aR}{2aR}\right) + \left(\frac{a}{R} - 1\right) \left(\frac{s^2 + a^2 + R^2 + 2aR}{2aR}\right)}{\frac{(s^2 + a^2 + R^2)^2 - 4a^2 R^2}{4a^2 R^2}} = \\
&= 2a \frac{2a(s^2 + a^2 + R^2) - 4aR^2}{(s^2 + a^2 + R^2)^2 - 4a^2 R^2} = 4a^2 \frac{(s^2 + a^2 + R^2) - 2R^2}{(s^2 + a^2 + R^2) - 4a^2 R^2}.
\end{aligned}$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}
V_1 V_2 &= \frac{\pi}{4a \sqrt{(s^2 + a^2 + R^2)^2 - 4a^2 R^2}} \cdot 4a^2 \frac{(s^2 + a^2 + R^2) - 2R^2}{(s^2 + a^2 + R^2) - 4a^2 R^2} = \\
&= \pi a \frac{(s^2 + a^2 + R^2) - 2R^2}{\left(\sqrt{(s^2 + a^2 + R^2)^2 - 4a^2 R^2}\right)^3}.
\end{aligned}$$

Теперь вычислим второй интеграл:

$$\Phi_{dF_1 - F_2} = \frac{s}{\pi} \int_0^{R_0} R \pi a \frac{(s^2 + a^2 + R^2) - 2R^2}{\left(\sqrt{(s^2 + a^2 + R^2)^2 - 4a^2 R^2}\right)^3} dR.$$

Подставив в это выражение  $t = s^2 + a^2 + R^2$ ,  $dt = 2RdR$ ,  $dR = \frac{dt}{2R}$ ,

$R^2 = t - (s^2 + a^2)$ ,  $dR = \frac{dt}{2R}$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
&\frac{sa}{2} \int \frac{t - 2t + 2(s^2 + a^2)}{\left(\sqrt{t^2 - 4a^2 t + 4a^2(s^2 + a^2)}\right)^3} dt = \\
&= \frac{sa}{2} \int \frac{-t + 2(s^2 + a^2)}{\left(\sqrt{(t - 2a^2)^2 + 4a^2(s^2 + a^2) - 4a^4}\right)^3} dt.
\end{aligned}$$

При  $y = t - 2a^2$ ,  $dt = dy$ ,  $t = y + 2a^2$  получим

$$\frac{sa}{2} \int \frac{-y + 2s^2}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2 s^2}\right)^3} dy = \frac{as}{2} \left[ -\int \frac{y dy}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2 s^2}\right)^3} + \int \frac{2s^2 dy}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2 s^2}\right)^3} \right].$$

Обозначив интегралы последнего выражения соответственно через  $A_1$  и  $A_2$ , преобразуем их (первый при  $z = y^2 + 4a^2s^2$ ,  $dz = 2ydy$ ,  $dy = dz/2y$ , второй при  $y = 2astgzdz$ ,  $dy = \frac{2as}{\cos^2 z}$ ,  $\sqrt{y^2 + 4a^2s^2} = \sqrt{4a^2s^2 \tan^2 z + 4a^2s^2}$ ,  $2as\sqrt{\tan^2 z + 1} = \frac{2as}{\cos z}$ ):

$$A_1 = -\int \frac{ydy}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}\right)^3} = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\left(\sqrt{z}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}};$$

$$\begin{aligned} A_2 &= 2s^2 \int \frac{dy}{\left(\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}\right)^3} = 2s^2 \int \frac{2as \cos^3 z}{(\cos^2 z)(2as)^3} dz = \frac{1}{2a^2} \int \cos z dz = \\ &= \frac{1}{2a^2} \sin z = \frac{\operatorname{tg} z}{2a^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}} = \\ &= \frac{1}{2a^2} \frac{y/(2as)}{\sqrt{1 + y^2/(4a^2s^2)}} = \frac{y}{2a^2 \sqrt{y^2 + 4a^2s^2}}. \end{aligned}$$

С учетом преобразований получим

$$\begin{aligned} \Phi_{dF_1-F_2} &= \frac{as}{2} [A_1 + A_2] \Big|_0^{R_0} = \frac{as}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4a^2s^2}} + \frac{y}{2a^2 \sqrt{y^2 + 4a^2s^2}} \right] \Big|_0^{R_0} = \\ &= \frac{s}{2} \left[ \frac{2a^2 + y}{2a \sqrt{y^2 + 4a^2s^2}} \right] \Big|_0^{R_0}. \end{aligned}$$

При  $y = t - 2a$  будем иметь

$$\frac{s}{4a} \left[ \frac{t}{\sqrt{(t-2a)^2 + 4a^2s^2}} \right] \Big|_0^{R_0} = \frac{s}{4a} \left[ \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4a^2(t - (s^2 + a^2))}} \right] \Big|_0^{R_0}.$$

Пусть  $t = s^2 + a^2 + R^2$ , тогда последнее соотношение будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{s}{4a} \left[ \frac{s^2 + a^2 + R^2}{\sqrt{(s^2 + a^2 + R^2)^2 - 4a^2R^2}} \right] \Big|_0^{R_0} = \\ &= \frac{s}{4a} \left[ \frac{s^2 + a^2 + R_0^2}{\sqrt{(s^2 + a^2 + R_0^2)^2 - 4a^2R_0^2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

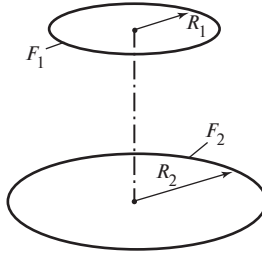


Рис. 2.2. Два параллельных соосных диска

Так как при интегрировании по  $\alpha$  мы взяли интеграл на участке от 0 до  $\pi$ , а реально необходимо интегрировать от 0 до  $2\pi$ , то полученное выражение необходимо умножить на 2. Следовательно,

$$\Phi_{dF_1-F_2} = \frac{s}{2a} \left[ \frac{s^2 + a^2 + R_0^2}{\sqrt{(s^2 + a^2 + R_0^2)^2 - 4a^2 R_0^2}} - 1 \right]. \quad (2.7)$$

Теперь рассмотрим пример расчета углового коэффициента для системы, состоящей из двух соосных круглых дисков (рис. 2.2).

Определим все величины, входящие в зависимость

$$\Phi_{F_1-F_2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2 = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \Phi_{dF_1-F_2} dF_1.$$

Первоначально вычислим  $\Phi_{dF_1-F_2} = \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2$ . Для этого

раскроем подынтегральное выражение. На рис. 2.3 изображена система, состоящая из круглого диска радиусом  $R_0$  и параллельного ему элемента плоскости  $dF_1$ . Из рисунка видно, что  $r^2 = s^2 + a^2 + R^2 + 2aR\cos\alpha$ ,  $\cos\psi_1 = \cos\psi_2 = s/r$ ,  $dF_2 = RdRd\alpha$ . Следовательно,

$$\Phi_{dF_1-F_2} = \frac{s^2}{\pi} \int_0^{R_0} R dR \int_0^\pi \frac{d\alpha}{(s^2 + a^2 + R^2 + 2aR\cos\alpha)^2}.$$

Этот интеграл вычисляется аналогично интегралу (2.6). В итоге получим

$$\Phi_{dF_1-F_2} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{s^2 + a^2 - R_0^2}{\sqrt{(s^2 + R_0^2 + a^2)^2 - 4a^2 R_0^2}} \right]. \quad (2.8)$$



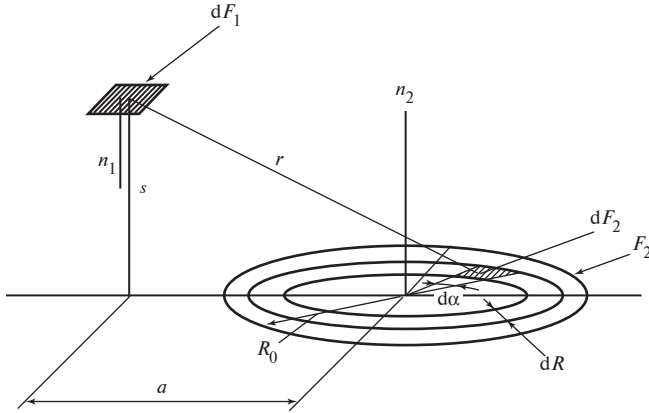


Рис. 2.3. Круглый диск и параллельный ему элемент плоскости

Далее вычислим  $\Phi_{F_1-F_2}$ , но при этом в (2.8) вместо  $a$  подставим  $R_1$ , а вместо  $R_0$  возьмем  $R_{20}$  и с учетом того, что  $dF_1 = R_1 dR_1 d\alpha$ ,  $F_1 = \pi R_{10}^2$ , получим

$$\begin{aligned} \Phi_{F_1-F_2} &= \frac{1}{F_1} \int \Phi_{dF_1-F_2} dF_1 = \\ &= \frac{1}{\pi R_{10}^2} \int_0^{R_{10}} R_1 dR_1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{s^2 + R_1^2 - R_{20}^2}{\sqrt{(s^2 + R_{20}^2 + R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_{20}^2}} \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi R_{10}^2} \int_0^{R_{10}} R_1 \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{s^2 + R_1^2 - R_{20}^2}{\sqrt{(s^2 + R_{20}^2 + R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_{20}^2}} \right] 2\pi dR_1 = \\ &= \frac{1}{R_{10}^2} \int_0^{R_{10}} R_1 \left[ 1 - \frac{s^2 + R_1^2 - R_{20}^2}{\sqrt{(s^2 + R_{20}^2 + R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_{20}^2}} \right] dR_1. \end{aligned}$$

При  $t = s^2 + R_1^2 + R_{20}^2$ ,  $dt = 2R_1 dR_1$ ,  $dR_1 = dt/(2R_1)$ ,  $R_1^2 = t - (s^2 + R_{20}^2)$  последнее выражение будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2R_{10}^2} \int \left[ 1 - \frac{t - 2R_{20}^2}{\sqrt{t^2 - 4R_{20}^2 t + 4R_{20}^2 (s^2 + R_{20}^2)}} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ t - \int \frac{t - 2R_{20}^2}{\sqrt{(t - 2R_{20}^2)^2 + 4R_{20}^2 s^2}} dt \right]. \end{aligned}$$

Если обозначим

$$(t - 2R_{20}^2)^2 + 4R_{20}^2 s^2 = y, \quad dy = 2(t - 2R_{20}^2)dt, \quad dt = \frac{dy}{2(t - 2R_{20}^2)},$$

то далее получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ t - \int \frac{dt}{2\sqrt{y}} \right] &= \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ t - \sqrt{y} \right] = \\ &= \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ t - \sqrt{(t - 2R_{20}^2)^2 + 4R_{20}^2 s^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ s^2 + R_1^2 + R_{20}^2 - \sqrt{(s^2 + R_1^2 - R_{20}^2)^2 + 4R_{20}^2 s^2} \right] \Big|_0^{R_{10}} = \\ &= \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ s^2 + R_1^2 + R_{20}^2 - \sqrt{(s^2 + R_1^2 + R_{20}^2)^2 - 4R_1^2 R_{20}^2} \right] \Big|_0^{R_{10}} = \\ &= \frac{1}{2R_{10}^2} \left[ s^2 + R_{10}^2 + R_{20}^2 - \sqrt{(s^2 + R_{10}^2 + R_{20}^2)^2 - 4R_{10}^2 R_{20}^2} \right]. \end{aligned}$$

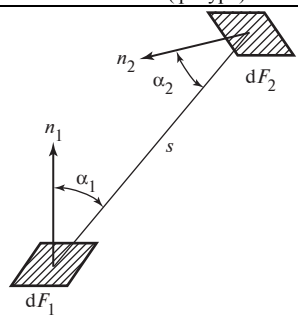
В итоге получим, что для двух соосных параллельных дисков радиусами  $R_1$  и  $R_2$  угловой коэффициент

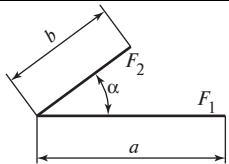
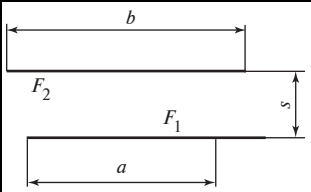
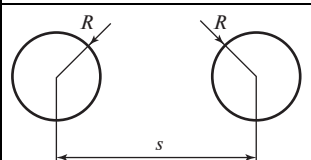
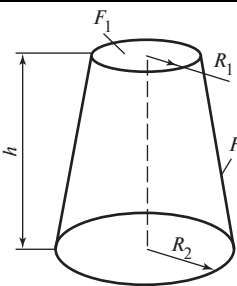
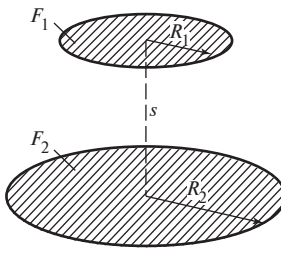
$$\Phi_{F_1-F_2} = \frac{1}{2R_1^2} \left[ s^2 + R_1^2 + R_2^2 - \sqrt{(s^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} \right]. \quad (2.9)$$

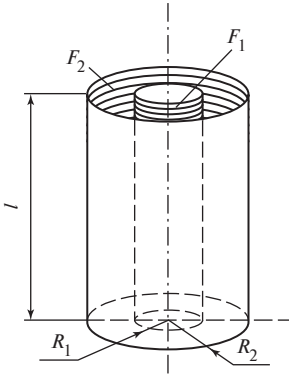
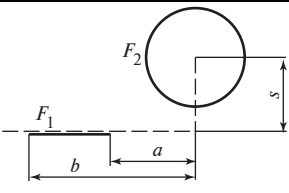
Далее в табл. 2.1 приведем формулы для определения угловых коэффициентов для наиболее часто встречающихся комбинаций поверхностей.

Таблица 2.1

Расчетные формулы для угловых коэффициентов

Геометрическое положение плоскостей (фигура)	Комбинация поверхностей; расчетная формула
	<p>Два бесконечно малых произвольно ориентированных элемента;</p> $d\Phi_{dF_1-dF_2} = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\pi s^2} dF_2$

Геометрическое положение плоскостей (фигура)	Комбинация поверхностей; расчетная формула
	Две бесконечные пластины, имеющие одну общую сторону; $\varphi_{12} = \frac{1}{2a} \left[ a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \right]$
	Две бесконечные пластины, параллельные друг другу; $\varphi_{12} = \frac{1}{2a} \left[ \sqrt{4s^2 + (a+b)^2} - \sqrt{4s^2 + (a-b)^2} \right]$
	Два бесконечно длинных параллельных цилиндра, имеющих одинаковый радиус; $\varphi_{12} = \frac{1}{\pi R} \left[ 2(s-2R)\sqrt{s+2R} + 2R \arcsin \frac{2R}{s} - s \right]$
	Внутренняя поверхность и торцы усеченного конуса; $\varphi_{21} = \frac{\sqrt{(h^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} - (h^2 - R_1^2 + R_2^2)}{2(R_1 + R_2)\sqrt{h^2 + (R_1 - R_2)^2}};$ $\varphi_{22} = 1 - \frac{\sqrt{(h^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} - h^2}{(R_1 + R_2)\sqrt{h^2 + (R_1 - R_2)^2}}$
	Два параллельных соосных диска; $\varphi_{12} = \frac{1}{2R_1^2} \left[ s^2 + R_1^2 + R_2^2 - \sqrt{(s^2 + R_1^2 + R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} \right]$

Геометрическое положение плоскостей (фигура)	Комбинация поверхностей; расчетная формула
	<p>Два соосных цилиндра;</p> $\varphi_{21} = \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1}{\pi R_2} \left\{ \arccos \frac{B}{A} - \frac{1}{2lR_1} \arccos \frac{R_1 B}{R_2 A} \left[ \sqrt{(A + 2R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} + B \arcsin \frac{R_1}{R_2} - \frac{\pi A}{2} \right] \right\}, \text{ здесь}$ $A = l^2 + R_2^2 - R_1^2; \quad B = l^2 - R_2^2 + R_1^2;$ $\varphi_{22} = 1 - \frac{R_1}{R_2} + \frac{2R_1}{\pi R_2} \arctg \frac{2\sqrt{R_2^2 - R_1^2}}{l} - \frac{l}{2\pi R_2} \times$ $\times \left\{ \frac{\sqrt{4R_2^2 + l^2}}{l} \arcsin \frac{4(R_2^2 - R_1^2) + \left(\frac{l^2}{4R_2^2}\right)(R_2^2 - 2R_1^2)}{l^2 + 4(R_2^2 - R_1^2)} - \arcsin \frac{R_2^2 - 2R_1^2}{R_2^2} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sqrt{4R_2^2 + l^2}}{l} - 1 \right) \right\}$
	<p>Полоса и цилиндр бесконечной длины;</p> $\varphi_{12} = \frac{R}{b-a} \left( \arctg \frac{b}{s} - \arctg \frac{a}{s} \right)$

### 2.2.3. Примеры решения задач методом угловых коэффициентов

**Пример 1.** Расчет коэффициента Клаузинга для цилиндрического трубопровода (рис. 2.4).

Обозначим входное сечение трубопровода цифрой 1, выходное сечение — 2 и боковую поверхность — 3. В сечение 1 входит поток газа  $Q_{д1}$ , десорбция газа с боковой поверхности отсутствует. Боковая поверхность трубопровода имеет коэффициент отражения  $\beta_3 = 1$ , а поверхности 1 и 2, так как представляют собой сквозные отверстия, имеют коэффициенты отражения  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . Для нахождения коэффициента Клаузинга необходимо определить, какая доля потока  $Q_{д1}$  дойдет до выходного сечения 2. Запишем уравнение (2.1) для каждой поверхности:

$$\begin{cases} Q_{\beta 1} = Q_{\alpha 1} + \beta_1 (\varphi_{11} Q_{\beta 1} + \varphi_{21} Q_{\beta 2} + \varphi_{31} Q_{\beta 3}); \\ Q_{\beta 2} = Q_{\alpha 2} + \beta_2 (\varphi_{12} Q_{\beta 1} + \varphi_{22} Q_{\beta 2} + \varphi_{32} Q_{\beta 3}); \\ Q_{\beta 3} = Q_{\alpha 3} + \beta_3 (\varphi_{13} Q_{\beta 1} + \varphi_{23} Q_{\beta 2} + \varphi_{33} Q_{\beta 3}). \end{cases}$$

Таким образом, нам необходимо решить данную систему относительно  $Q_{\beta 1}$ ,  $Q_{\beta 2}$ ,  $Q_{\beta 3}$ .

Определим угловые коэффициенты, входящие в эту систему. По формуле (2.9) рассчитаем  $\varphi_{12}$  при  $R_1 = R_2 = R$ ,  $S = 2R$ ,  $\varphi_{12} = 0,172$ . Для любой плоской поверхности  $\varphi_{ii} = 0$ , следовательно,  $\varphi_{11} = 0$ . Из свойства замкнутости ( $\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} = 1$ ) получим, что  $\varphi_{13} = 0,828$ ,  $\varphi_{21} = \varphi_{12} = 0,172$ ,  $\varphi_{22} = \varphi_{11} = 0$ ,  $\varphi_{23} = \varphi_{32} = 0,828$ .

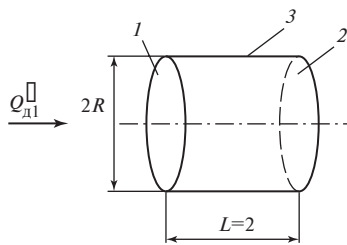


Рис. 2.4. Цилиндрический трубопровод

Из свойства взаимности ( $\varphi_{31} F_3 = \varphi_{13} F_1$ ) имеем  $\varphi_{31} = \varphi_{13} \frac{F_1}{F_3}$ ; так как  $F_1 = \pi R^2$ ,  $F_3 = 4\pi R^2$ , то  $\varphi_{31} = \varphi_{32} = 0,207$ . Из свойства замкнутости определим, что  $\varphi_{33} = 1 - \varphi_{31} - \varphi_{32} = 0,586$ .

Так как на поверхности 3 отсутствует десорбция молекул, а в сечение 2 не входит внешний поток, то  $Q_{\alpha 2} = 0$ ,  $Q_{\alpha 3} = 0$ . Получим, что  $Q_{\beta 1} = Q_{\alpha 1}$ ,  $Q_{\beta 2} = 0$ ,  $Q_{\beta 3} = \varphi_{13} Q_{\beta 1} + \varphi_{33} Q_{\beta 3}$ , или  $Q_{\beta 3} = \frac{\varphi_{13} Q_{\alpha 1}}{1 - \varphi_{33}}$ .

Поток, падающий на  $i$ -ю поверхность,  $Q_i = \sum_{j=1}^n Q_{\beta j} \varphi_{ji}$ , следовательно,

$$Q_2 = Q_{\beta 1} \varphi_{12} + Q_{\beta 2} \varphi_{22} + Q_{\beta 3} \varphi_{32} = Q_{\alpha 1} \varphi_{12} + \frac{\varphi_{13} Q_{\alpha 1}}{1 - \varphi_{33}} \varphi_{32} = \left( \varphi_{12} + \frac{\varphi_{13} \varphi_{32}}{1 - \varphi_{33}} \right) Q_{\alpha 1}.$$

Определим коэффициент Клаузинга для трубопровода:

$$k_{\text{Кл}} = \frac{Q_2}{Q_1} = \varphi_{12} + \frac{\varphi_{13} \varphi_{32}}{1 - \varphi_{33}} = 0,586.$$

Решив данную задачу при  $L \rightarrow \infty$ , получим  $\varphi_{11} = 0$ ,  $\varphi_{12} \approx 0$ ,  $\varphi_{13} \approx 1$ ,  $\varphi_{21} \approx 0$ ,  $\varphi_{22} = 0$ ,  $\varphi_{23} \approx 1$ ,  $\varphi_{31} \approx 0$ ,  $\varphi_{32} \approx 0$ ,  $\varphi_{33} \approx 1$ , а  $k_{\text{Кл}} \rightarrow 0,5$ . Этот результат является неверным, так как при  $L \rightarrow \infty$  коэффициент Клаузинга трубопровода стремится к нулю:  $k_{\text{Кл}} \rightarrow 0$ . Поэтому применение метода угловых коэффициентов в таком виде при  $L/R > 4$  дает большую погрешность. Если  $L/R = 4$ , то коэффициент Клаузинга, рассчитанный методом угловых коэффициентов, отличается от действительного примерно на 40 %. Для получения более точного результата применяют метод угловых коэффициентов с разбиением.

**Пример 2.** Расчет коэффициента Клаузинга для цилиндрического трубопровода методом угловых коэффициентов с разбиением (рис. 2.5).

Решим предыдущую задачу методом угловых коэффициентов с разбиением. Разделим трубопровод на две равные части — левую (поверхности 1, 3, 5) и правую (поверхности 5, 4, 2).

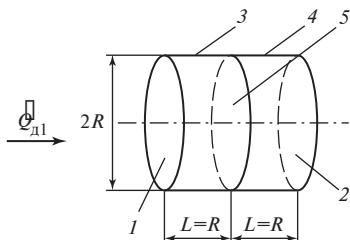


Рис. 2.5. Трубопровод

Определим, какая часть потока  $Q_{д1}$ , вошедшего в сечение 1, дойдет до сечения 5, т.е. решим задачу без учета правой половины трубопровода. Аналогично предыдущей задаче запишем систему уравнений и определим угловые коэффициенты ( $\beta_1 = 0, \beta_3 = 1, \beta_5 = 0$ ) (так как из правой половины трубопровода часть потока будет возвращаться обратно, то  $Q_{д5}$  не будет равняться нулю, обозначим этот поток как  $Q_{д5}^n$ ):

$$\begin{cases} Q_{\beta 1} = Q_{д1} + \beta_1(\varphi_{11}Q_{\beta 1} + \varphi_{31}Q_{\beta 3} + \varphi_{51}Q_{\beta 5}); \\ Q_{\beta 3} = Q_{д3} + \beta_3(\varphi_{13}Q_{\beta 1} + \varphi_{33}Q_{\beta 3} + \varphi_{53}Q_{\beta 5}); \\ Q_{\beta 5} = Q_{д5}^n + \beta_5(\varphi_{15}Q_{\beta 1} + \varphi_{35}Q_{\beta 3} + \varphi_{55}Q_{\beta 5}); \end{cases}$$

$$\varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{13} = 0,618; \quad \varphi_{15} = 0,382;$$

$$\varphi_{31} = 0,309; \quad \varphi_{33} = 0,382; \quad \varphi_{35} = 0,309;$$

$$\varphi_{51} = 0,382; \quad \varphi_{53} = 0,618; \quad \varphi_{55} = 0.$$

Получим, что  $Q_{\beta 1} = Q_{д1}$ ,  $Q_{\beta 5} = Q_{д5}^n$ ,  $Q_{\beta 3} = \varphi_{13}Q_{\beta 1} + \varphi_{33}Q_{\beta 3} + \varphi_{53}Q_{\beta 5} =$   
 $= \frac{\varphi_{13}Q_{д1} + \varphi_{53}Q_{д5}^n}{1 - \varphi_{33}}$ . Отсюда следует, что

$$Q_5^n = Q_{\beta 1}\varphi_{15} + Q_{\beta 3}\varphi_{35} + Q_{\beta 5}\varphi_{55} =$$

$$= Q_{д1}\varphi_{15} + \frac{\varphi_{13}Q_{д1} + \varphi_{53}Q_{д5}^n}{1 - \varphi_{33}}\varphi_{35} = 0,691Q_{д1} + 0,309Q_{д5}^n. \quad (2.10)$$

Для определения  $Q_{д5}^n$  необходимо провести расчет для правой половины трубопровода, так как  $Q_{д5}^n = Q_5^n$ . В сечение 5 слева входит поток  $Q_5^n$ , т.е.  $Q_{д5}^n = Q_5^n$ ,  $\beta_2 = 0, \beta_4 = 1, \beta_5 = 0, Q_{д2} = 0$ . Снова запишем систему уравнений и определим угловые коэффициенты:

$$\begin{cases} Q_{\beta 2} = Q_{д2} + \beta_2(\varphi_{22}Q_{\beta 2} + \varphi_{42}Q_{\beta 4} + \varphi_{52}Q_{\beta 5}); \\ Q_{\beta 4} = Q_{д4} + \beta_4(\varphi_{24}Q_{\beta 2} + \varphi_{44}Q_{\beta 4} + \varphi_{54}Q_{\beta 5}); \\ Q_{\beta 5} = Q_{д5}^n + \beta_5(\varphi_{25}Q_{\beta 2} + \varphi_{45}Q_{\beta 4} + \varphi_{55}Q_{\beta 5}); \end{cases}$$

$$\varphi_{22} = 0; \quad \varphi_{24} = 0,618; \quad \varphi_{25} = 0,382;$$

$$\varphi_{42} = 0,309; \quad \varphi_{44} = 0,382; \quad \varphi_{45} = 0,309;$$

$$\varphi_{52} = 0,382; \quad \varphi_{54} = 0,618; \quad \varphi_{55} = 0.$$

После подстановки угловых коэффициентов система примет следующий вид:

$$\begin{cases} Q_{\beta 2} = 0; \\ Q_{\beta 4} = \varphi_{44} Q_{\beta 4} + \varphi_{54} Q_{\beta 5} = \frac{\varphi_{54} Q_{\text{д5}}^{\text{п}}}{1 - \varphi_{44}}; \\ Q_{\beta 5} = Q_{\text{д5}}^{\text{п}}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$Q_5^{\text{п}} = Q_{\beta 2} \varphi_{25} + Q_{\beta 4} \varphi_{45} + Q_{\beta 5} \varphi_{55} = \frac{\varphi_{54} Q_{\text{д5}}^{\text{п}}}{1 - \varphi_{44}} \varphi_{45} = \frac{\varphi_{54} Q_5^{\text{п}}}{1 - \varphi_{44}} \varphi_{45} = 0,191 Q_5^{\text{п}}.$$

Подставим  $Q_5^{\text{п}}$  вместо  $Q_{\text{д5}}^{\text{п}}$  в формулу (2.10), получим, что  $Q_5^{\text{п}} = 0,691 Q_{\text{д1}} + 0,06 Q_5^{\text{п}}$ , т.е.  $Q_5^{\text{п}} = 0,735 Q_{\text{д1}}$ . От сечения 1 до сечения 5 дошел поток, равный  $0,735 Q_{\text{д1}}$ . Теперь определим, какая часть этого потока дошла до сечения 2 ( $Q_{\text{д5}}^{\text{п}} = Q_5^{\text{п}} = 0,735 Q_{\text{д1}}$ ):

$$Q_2 = Q_{\beta 2} \varphi_{22} + Q_{\beta 2} \varphi_{42} + Q_{\beta 5} \varphi_{52} = \frac{\varphi_{54} Q_{\text{д5}}^{\text{п}}}{1 - \varphi_{44}} \varphi_{42} + Q_{\text{д5}}^{\text{п}} \varphi_{52} = 0,691 Q_{\text{д5}}^{\text{п}} = 0,508 Q_{\text{д1}}.$$

Определим коэффициент Клаузинга:

$$k_{\text{Кл}} = \frac{Q_2}{Q_1} = 0,508.$$

Коэффициент Клаузинга для трубопровода при  $L/R = 1$  равен 0,51. Как видно, значение коэффициента Клаузинга, рассчитанное методом угловых коэффициентов с разбиением, получилось значительно более точным, чем значение, рассчитанное без разбиений. Отметим также, что чем больше число разбиений, тем точнее получается результат.

**Пример 3.** Определение коэффициента Клаузинга для ячейки.

Рассмотрим ячейку, представляющую собой сквозной цилиндр с расположенным в центре кольцом (рис. 2.6). Диаметры  $d_0$  и  $d_1$  равны  $4R$  каждый. Боковая поверхность 4 имеет коэффициент прилипания  $\gamma_4$ , равный 0,3, и длину  $s$ , равную  $6R$ . Внутренний и внешний диаметры кольца 3 равны  $2R$  и  $3R$  соответственно коэффициент прилипания кольца  $\gamma_3 = 1$ . Расстояние от входного сечения до кольца равно  $c/2$ . Во входное сечение ячейки (поверхность 0) входит поток  $Q_{\text{д0}}$ . Десорбция газа с боковых и внутренних поверхностей отсутствует. Необходимо определить коэффициент проводимости (Клаузинга) для данной ячейки, т.е. долю потока  $Q_{\text{д0}}$ , которая дойдет до выходного сечения 1. Расчет для ячейки проведем методом угловых коэффициентов.

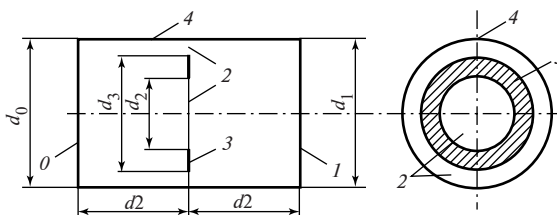


Рис. 2.6. Цилиндр с кольцом

Рассмотрим левую часть ячейки от входного сечения до пластины. Поверхности 0 и 2 являются сквозными отверстиями, следовательно, имеют коэффициенты прилипания  $\gamma_0, \gamma_2$ , равные 1. Определим поток, который дойдет до сечения 2, и запишем для левой части ячейки систему уравнений [см. (2.1)]:

$$\begin{cases} Q_{\beta 0} = Q_{\alpha 0} + \beta_0 (\varphi_{00} Q_{\beta 0} + \varphi_{20} Q_{\beta 2} + \varphi_{30} Q_{\beta 3} + \varphi_{40} Q_{\beta 4}); \\ Q_{\beta 2} = Q_{\alpha 2} + \beta_2 (\varphi_{02} Q_{\beta 0} + \varphi_{22} Q_{\beta 2} + \varphi_{32} Q_{\beta 3} + \varphi_{42} Q_{\beta 4}); \\ Q_{\beta 3} = Q_{\alpha 3} + \beta_3 (\varphi_{03} Q_{\beta 0} + \varphi_{23} Q_{\beta 2} + \varphi_{33} Q_{\beta 3} + \varphi_{43} Q_{\beta 4}); \\ Q_{\beta 4} = Q_{\alpha 4} + \beta_4 (\varphi_{04} Q_{\beta 0} + \varphi_{24} Q_{\beta 2} + \varphi_{34} Q_{\beta 3} + \varphi_{44} Q_{\beta 4}). \end{cases}$$

Десорбция газа с поверхностями 3 и 4 отсутствует, т.е.  $Q_{\alpha 3}$  и  $Q_{\alpha 4}$  равны 0. Поток, который будет возвращаться из правой половины ячейки в левую, пренебрежимо мал, поэтому примем, что  $Q_{\alpha 2} = 0$ . Коэффициенты отражения поверхностей равны:  $\beta_0 = 1 - \gamma_0 = 0$ ;  $\beta_2 = 1 - \gamma_2 = 0$ ;  $\beta_3 = 1 - \gamma_3 = 0$ ;  $\beta_4 = 1 - \gamma_4 = 0,7$ .

После подстановки значений коэффициентов отражения и потоков получим

$$\begin{cases} Q_{\beta 0} = Q_{\alpha 0}; \\ Q_{\beta 2} = 0; \\ Q_{\beta 3} = 0; \\ Q_{\beta 4} = \beta_4 (\varphi_{04} Q_{\alpha 0} + \varphi_{44} Q_{\beta 4}) = \frac{\beta_4 \varphi_{04} Q_{\alpha 0}}{1 - \beta_4 \varphi_{44}}. \end{cases}$$

Теперь определим угловые коэффициенты. Поверхности 0, 2 и 3 являются плоскостями, следовательно,  $\varphi_{00} = 0$ ,  $\varphi_{22} = 0$ ,  $\varphi_{33} = 0$ . Поверхности 2 и 3 являются частями одной плоскости, т.е.  $\varphi_{23} = 0$  и  $\varphi_{32} = 0$ . Сумму угловых коэффициентов  $\varphi_{02} + \varphi_{03}$  определим по формуле для двух соосных параллельных дисков:

$$\varphi_{02} + \varphi_{03} = \frac{1}{2R_0^2} \left[ \left( \frac{c}{2} \right)^2 + R_0^2 + R_2^2 - \sqrt{\left( \left( \frac{c}{2} \right)^2 + R_0^2 + R_2^2 \right)^2 - 4R_0^2 R_2^2} \right] = 0,25.$$

Угловым коэффициент  $\varphi_{03}$  найдем по формуле для двух соосных параллельных колец:

$$\begin{aligned} \varphi_{03} = \frac{1}{2R_0^2} & \left[ \sqrt{\left( \left( \frac{c}{2} \right)^2 + R_0^2 + R_2^2 \right)^2 - 4R_0^2 R_2^2} - \sqrt{\left( \left( \frac{c}{2} \right)^2 + R_2^2 \right)^2} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\left( \left( \frac{c}{2} \right)^2 + R_0^2 + R_3^2 \right)^2 - 4R_0^2 R_3^2} + \sqrt{\left( \left( \frac{c}{2} \right)^2 + R_3^2 \right)^2} \right] = 0,099. \end{aligned}$$

Используя основные свойства угловых коэффициентов, определим их значения:

$$\varphi_{02} = (\varphi_{02} + \varphi_{03}) - \varphi_{03} = 0,25 - 0,099 = 0,151;$$

$$\varphi_{04} = 1 - \varphi_{00} - \varphi_{02} - \varphi_{03} = 0,75;$$



$$F_0 = 12,566R^2; \quad F_3 = \pi(R_3^2 - R_2^2) = 3,927R^2;$$

$$F_2 = F_0 - F_3 = 8,639R^2; \quad F_4 = 2\pi R_0 \frac{c}{2} = \pi R_0 c = 37,699R^2;$$

$$\varphi_{20} = \varphi_{02} \frac{F_0}{F_2} = 0,220; \quad \varphi_{30} = \varphi_{03} \frac{F_0}{F_3} = 0,317;$$

$$\varphi_{40} = \varphi_{04} \frac{F_0}{F_4} = 0,250; \quad \varphi_{24} = 1 - \varphi_{20} - \varphi_{22} - \varphi_{23} = 0,780;$$

$$\varphi_{34} = 1 - \varphi_{30} - \varphi_{32} - \varphi_{33} = 0,683; \quad \varphi_{42} = \varphi_{24} \frac{F_2}{F_4} = 0,179;$$

$$\varphi_{43} = \varphi_{34} \frac{F_3}{F_4} = 0,071; \quad \varphi_{44} = 1 - \varphi_{40} - \varphi_{42} - \varphi_{43} = 0,500;$$

$$\varphi_{00} = 0; \quad \varphi_{02} = 0,151; \quad \varphi_{03} = 0,099; \quad \varphi_{04} = 0,750;$$

$$\varphi_{20} = 0,220; \quad \varphi_{22} = 0; \quad \varphi_{23} = 0; \quad \varphi_{24} = 0,780;$$

$$\varphi_{30} = 0,317; \quad \varphi_{32} = 0; \quad \varphi_{33} = 0; \quad \varphi_{34} = 0,683;$$

$$\varphi_{40} = 0,250; \quad \varphi_{42} = 0,179; \quad \varphi_{43} = 0,071; \quad \varphi_{44} = 0,500.$$

Найдем поток, дошедший до сечения 2:

$$Q_2 = Q_{\beta 0} \varphi_{02} + Q_{\beta 2} \varphi_{22} + Q_{\beta 3} \varphi_{32} + Q_{\beta 4} \varphi_{42} = Q_{\beta 0} \varphi_{02} + \frac{\beta_4 \varphi_{04} Q_{\beta 0}}{1 - \beta_4 \varphi_{44}} \varphi_{42} = 0,296 Q_{\beta 0}.$$

Теперь рассмотрим правую часть ячейки от пластины до выходного сечения. В сечение 2 входит поток  $Q_{\beta 2} = Q_2$ . Запишем для данной части систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_{\beta 1} = Q_{\beta 1} + \beta_1 (\varphi_{11} Q_{\beta 1} + \varphi_{21} Q_{\beta 2} + \varphi_{31} Q_{\beta 3} + \varphi_{41} Q_{\beta 4}); \\ Q_{\beta 2} = Q_{\beta 2} + \beta_2 (\varphi_{12} Q_{\beta 1} + \varphi_{22} Q_{\beta 2} + \varphi_{32} Q_{\beta 3} + \varphi_{42} Q_{\beta 4}); \\ Q_{\beta 3} = Q_{\beta 3} + \beta_3 (\varphi_{13} Q_{\beta 1} + \varphi_{23} Q_{\beta 2} + \varphi_{33} Q_{\beta 3} + \varphi_{43} Q_{\beta 4}); \\ Q_{\beta 4} = Q_{\beta 4} + \beta_4 (\varphi_{14} Q_{\beta 1} + \varphi_{24} Q_{\beta 2} + \varphi_{34} Q_{\beta 3} + \varphi_{44} Q_{\beta 4}). \end{cases}$$

Десорбция газа с поверхностей 1, 3, 4 отсутствует, следовательно, потоки  $Q_{\beta 1}$ ,  $Q_{\beta 3}$  и  $Q_{\beta 4}$  равны 0,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ . Отсюда

$$\begin{cases} Q_{\beta 1} = 0; \\ Q_{\beta 2} = Q_2 = 0,296 Q_{\beta 0}; \\ Q_{\beta 3} = 0; \\ Q_{\beta 4} = \beta_4 (0,296 \varphi_{24} Q_{\beta 0} + \varphi_{44} Q_{\beta 4}) = \frac{0,296 \beta_4 \varphi_{24} Q_{\beta 0}}{1 - \beta_4 \varphi_{44}}. \end{cases}$$

Так как левая и правая половины ячейки симметричны относительно пластины, то угловые коэффициенты симметричных поверхностей равны:

$$\varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{12} = \varphi_{02} = 0,151; \quad \varphi_{13} = \varphi_{03} = 0,099; \quad \varphi_{14} = \varphi_{04} = 0,750;$$

$$\varphi_{21} = \varphi_{20} = 0,220; \quad \varphi_{22} = 0; \quad \varphi_{23} = 0; \quad \varphi_{24} = 0,780;$$

$$\varphi_{31} = \varphi_{30} = 0,317; \quad \varphi_{32} = 0; \quad \varphi_{33} = 0; \quad \varphi_{34} = 0,683;$$

$$\varphi_{41} = \varphi_{40} = 0,250 ; \varphi_{42} = 0,179 ; \varphi_{43} = 0,071 ; \varphi_{44} = 0,500 .$$

Определим поток, который дошел от сечения  $\theta$  до сечения  $1$ :

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{\beta 1} \varphi_{11} + Q_{\beta 2} \varphi_{21} + Q_{\beta 3} \varphi_{31} + Q_{\beta 4} \varphi_{41} = Q_{\beta 2} \varphi_{21} + Q_{\beta 4} \varphi_{41} = \\ &= 0,296 Q_{\text{д}0} \varphi_{21} + \frac{0,296 \beta_4 \varphi_{24} Q_{\text{д}0}}{1 - \beta_4 \varphi_{44}} \varphi_{41} = 0,127 Q_{\text{д}0} . \end{aligned}$$

$$\text{Коэффициент Клаузинга ячейки } k_{\text{Кл}} = \frac{Q_1}{Q_{\text{д}0}} = 0,127 .$$

**Пример 4.** Расчет коэффициента захвата для ячейки методом угловых коэффициентов.

В качестве примера рассмотрим ячейку, имеющую форму усеченного конуса (рис. 2.7). У данного конуса одно из оснований (поверхность  $1$ ) заглушено. Диаметры  $d_0$  и  $d_1$  равны  $4R$  и  $2R$  соответственно. Коэффициент прилипания  $\gamma_1$  поверхности  $1$  равен  $0,7$ . Поверхность  $2$  имеет длину  $a = R$  и коэффициент прилипания  $\gamma_2 = 0,5$ . Коэффициент прилипания  $\gamma_3$  и длина  $b$  поверхности  $3$  равны  $0,6$  и  $2R$  соответственно. Во входное сечение ячейки (поверхность  $\theta$ ) входит поток  $Q_{\text{д}0}$ . Десорбция газа с боковых поверхностей и поверхности  $1$  отсутствует. Необходимо определить коэффициент захвата для данной ячейки, т.е. долю потока  $Q_{\text{д}0}$ , которая вернется обратно во входное сечение.

Для получения наиболее точного результата решим данную задачу методом угловых коэффициентов с разбиениями.

Рассмотрим левую часть ячейки (рис. 2.8), которая состоит из плоской поверхности  $\theta$ , конической поверхности  $2$  и плоской поверхности  $4$ . Поверхности  $\theta$  и  $4$  — сквозные отверстия, следовательно, они имеют коэффициенты прилипания  $\gamma_0$  и  $\gamma_4$ , равные  $1$ . Из правой части ячейки в левую вернется поток  $Q_{\text{д}4}$ . Необходимо определить поток, дошедший до сечения  $4$ .

Запишем для левой части ячейки систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_{\beta 0} = Q_{\text{д}0} + \beta_0 (\varphi_{00} Q_{\beta 0} + \varphi_{20} Q_{\beta 2} + \varphi_{40} Q_{\beta 4}) ; \\ Q_{\beta 2} = Q_{\text{д}2} + \beta_2 (\varphi_{02} Q_{\beta 0} + \varphi_{22} Q_{\beta 2} + \varphi_{42} Q_{\beta 4}) ; \\ Q_{\beta 4} = Q_{\text{д}4} + \beta_4 (\varphi_{04} Q_{\beta 0} + \varphi_{24} Q_{\beta 2} + \varphi_{44} Q_{\beta 4}) . \end{cases}$$

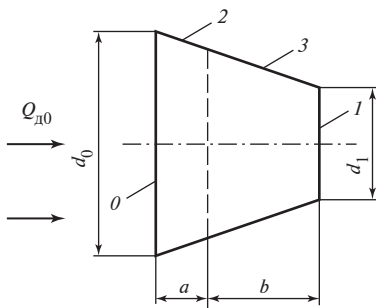


Рис. 2.7. Коническая ячейка

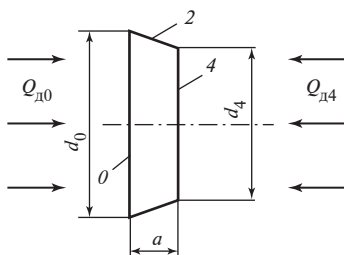


Рис. 2.8. Левая часть ячейки

Так как десорбция газа с поверхности 2 отсутствует, то  $Q_{л2} = 0$ . Коэффициенты отражения поверхностей равны:  $\beta_0 = 1 - \gamma_0 = 0$ ,  $\beta_2 = 1 - \gamma_2 = 0,5$ ,  $\beta_4 = 1 - \gamma_4 = 0$ . Таким образом, система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} Q_{\beta 0} = Q_{л0}; \\ Q_{\beta 2} = \beta_2 (\varphi_{02} Q_{л0} + \varphi_{22} Q_{\beta 2} + \varphi_{42} Q_{л4}); \\ Q_{\beta 4} = Q_{л4}. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } Q_{\beta 2} = \frac{\beta_2 (\varphi_{02} Q_{л0} + \varphi_{42} Q_{л4})}{1 - \beta_2 \varphi_{22}}.$$

Для решения данной системы необходимо определить угловые коэффициенты. Поверхности 0 и 4 являются плоскими, следовательно,  $\varphi_{00} = 0$  и  $\varphi_{44} = 0$ . Угловой коэффициент  $\varphi_{04}$  найдем по формуле для двух параллельных соосных дисков:

$$\varphi_{04} = \frac{1}{2R_0^2} \left[ a^2 + R_0^2 + R_4^2 - \sqrt{(a^2 + R_0^2 + R_4^2)^2 - 4R_0^2 R_4^2} \right].$$

Тангенс угла  $\theta$  между высотой конуса и его образующей равен отношению  $\frac{R_0 - R_4}{a + b} = \frac{2R - R}{R + 2R} = \frac{1}{3}$ ,  $R_4 = R_0 - a \operatorname{tg} \theta = \frac{5}{3} R$ .

Подставив выражения для  $R_0$  и  $R_4$  в формулу для определения  $\varphi_{04}$ , получим  $\varphi_{04} = 0,471$ . Площади поверхностей 0 и 4 равны  $12,566R^2$  и  $8,727R^2$  соответственно. По свойству взаимности найдем, что угловой коэффициент

$$\varphi_{40} = \varphi_{04} \frac{F_0}{F_4} = 0,471 \frac{12,566R^2}{8,727R^2} = 0,678. \text{ На основании свойства замкнутости полу-}$$

чим  $\varphi_{02} = 1 - \varphi_{00} - \varphi_{04} = 0,529$ ,  $\varphi_{42} = 1 - \varphi_{40} - \varphi_{44} = 0,322$ . Площадь поверхности

2 равна  $\pi \frac{a}{\cos \theta} (R_0 + R_4) = 12,143R^2$ . Из свойства взаимности определим, что

$$\varphi_{20} = \varphi_{02} \frac{F_0}{F_2} = 0,529 \frac{12,566R^2}{12,143R^2} = 0,547, \quad \varphi_{24} = \varphi_{42} \frac{F_4}{F_2} = 0,322 \frac{8,727R^2}{12,143R^2} = 0,231.$$

Из свойства замкнутости ( $\varphi_{22} = 1 - \varphi_{20} - \varphi_{24} = 0,222$ ) будем иметь:

$$\varphi_{00} = 0; \quad \varphi_{02} = 0,529; \quad \varphi_{04} = 0,471;$$

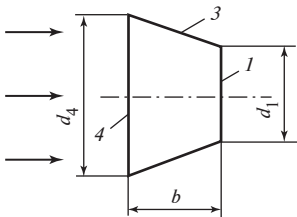
$$\varphi_{20} = 0,547; \quad \varphi_{22} = 0,222; \quad \varphi_{24} = 0,231;$$

$$\varphi_{40} = 0,678; \quad \varphi_{42} = 0,322; \quad \varphi_{44} = 0.$$

Поток  $Q'_4$ , дошедший до сечения 4, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{04} Q_{\beta 0} + \varphi_{24} Q_{\beta 2} + \varphi_{44} Q_{\beta 4} &= \varphi_{04} Q_{л0} + \varphi_{24} \frac{\beta_2 (\varphi_{02} Q_{л0} + \varphi_{42} Q_{л4})}{1 - \beta_2 \varphi_{22}}; \\ Q'_4 &= 0,540 Q_{л0} + 0,042 Q_{л4}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Теперь рассмотрим правую часть ячейки (рис. 2.9) и определим, какая доля потока  $Q'_4 = Q_4$  вернется обратно в левую часть, т.е. найдем  $Q_{л4}$ . Поверхность 4 является сквозным отверстием и имеет коэффициент прилипания  $\gamma_4 = 1$ .



**Рис. 2.9. Правая часть ячейки**

Запишем для правой части ячейки систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_{\beta 1} = Q_{\alpha 1} + \beta_1 (\varphi_{11} Q_{\beta 1} + \varphi_{31} Q_{\beta 3} + \varphi_{41} Q_{\beta 4}); \\ Q_{\beta 3} = Q_{\alpha 3} + \beta_3 (\varphi_{13} Q_{\beta 1} + \varphi_{33} Q_{\beta 3} + \varphi_{43} Q_{\beta 4}); \\ Q_{\beta 4} = Q_{\alpha 4} + \beta_4 (\varphi_{14} Q_{\beta 1} + \varphi_{34} Q_{\beta 3} + \varphi_{44} Q_{\beta 4}). \end{cases}$$

Десорбция газа с поверхностей 1 и 3 отсутствует, следовательно,  $Q_{\alpha 1}$  и  $Q_{\alpha 3}$  равны нулю. Поток  $Q_{\alpha 4}$ , который попадает из левой части ячейки в правую, равен  $Q'_4$ .

Коэффициенты отражения поверхностей имеют следующие значения  $\beta_1 = 1 - \gamma_1 = 0,3$ ;  $\beta_3 = 1 - \gamma_3 = 0,4$ ;  $\beta_4 = 1 - \gamma_4 = 0$ . Таким образом, система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} Q_{\beta 1} = \beta_1 (\varphi_{11} Q_{\beta 1} + \varphi_{31} Q_{\beta 3} + \varphi_{41} Q'_4); \\ Q_{\beta 3} = \beta_3 (\varphi_{13} Q_{\beta 1} + \varphi_{33} Q_{\beta 3} + \varphi_{43} Q'_4); \\ Q_{\beta 4} = Q'_4. \end{cases}$$

После преобразования получим

$$Q_{\beta 1} = \frac{\beta_1 (\varphi_{31} Q_{\beta 3} + \varphi_{41} Q'_4)}{1 - \beta_1 \varphi_{11}}; \quad Q_{\beta 3} = \frac{\beta_3 (\varphi_{13} Q_{\beta 1} + \varphi_{43} Q'_4)}{1 - \beta_3 \varphi_{33}}.$$

Как и для левой части ячейки, определим угловые коэффициенты для правой:

$$\varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{44} = 0; \quad \varphi_{14} = \frac{1}{2R_1^2} \left[ b^2 + R_1^2 + R_4^2 - \sqrt{(b^2 + R_1^2 + R_4^2)^2 - 4R_1^2 R_4^2} \right] = 0,375;$$

$$F_1 = \pi R_1^2 = \pi R^2;$$

$$\varphi_{41} = \varphi_{14} \frac{F_1}{F_4} = 0,135; \quad \varphi_{13} = 1 - \varphi_{11} - \varphi_{14} = 0,625; \quad \varphi_{43} = 1 - \varphi_{41} - \varphi_{44} = 0,865;$$

$$F_3 = \pi \frac{b}{\cos \gamma} (R_1 + R_4) = 17,663 R^2.$$

Из свойства взаимности найдем  $\varphi_{31}$  и  $\varphi_{34}$ :

$$\varphi_{31} = \varphi_{13} \frac{F_1}{F_3} = 0,111; \quad \varphi_{34} = \varphi_{43} \frac{F_4}{F_3} = 0,427.$$

Из свойства замкнутости  $\varphi_{33} = 1 - \varphi_{31} - \varphi_{34} = 0,462$ . Получим следующие угловые коэффициенты:

$$\varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{13} = 0,625; \quad \varphi_{14} = 0,375;$$

$$\varphi_{31} = 0,111; \quad \varphi_{33} = 0,462; \quad \varphi_{34} = 0,427;$$

$$\varphi_{41} = 0,135; \quad \varphi_{43} = 0,865; \quad \varphi_{44} = 0.$$

Зная угловые коэффициенты, можно определить  $Q_{\beta 1}$  и  $Q_{\beta 3}$  относительно  $Q'_4$  :

$$\begin{cases} Q_{\beta 1} = 0,0333Q_{\beta 3} + 0,0405Q'_4; \\ Q_{\beta 3} = 0,307Q_{\beta 1} + 0,424Q'_4. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим, что  $Q_{\beta 1} = 0,0552Q'_4$ ,  $Q_{\beta 3} = 0,441Q'_4$ . Найдем поток, который вернется в левую часть ячейки:  $Q_{d4} = \Phi_{14}Q_{\beta 1} + \Phi_{34}Q_{\beta 3} + \Phi_{44}Q_{\beta 4} = 0,209Q'_4$  или  $Q'_4 = 4,785Q_{d4}$ . Далее, подставив в последнюю формулу выражение для  $Q'_4$ , получим, что  $Q_{d4} = 0,114Q_{d0}$ .

Вернемся к левой части ячейки. Зная  $Q_{d4}$ , можем определить поток  $Q_0$ , который выйдет из ячейки:

$$Q_0 = \Phi_{00}Q_{\beta 0} + \Phi_{20}Q_{\beta 2} + \Phi_{40}Q_{\beta 4} = \Phi_{20} \frac{\beta_2 (\Phi_{02}Q_{d0} + \Phi_{42}Q_{d4})}{1 - \beta_2\Phi_{22}} + \Phi_{40}Q_{d4} = 0,251Q_{d0}.$$

Коэффициент захвата ячейки

$$K_{\text{захв}} = \frac{Q_{d0} - Q_0}{Q_{d0}} = 0,749.$$

## 2.3. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ПРОБНОЙ ЧАСТИЦЫ ДЛЯ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО РЕЖИМА

### 2.3.1. Описание общего алгоритма

#### 1. Ввод начальных данных:

- определение расположения и вида источников газа, а также закона распределения скоростей.

Под видом источника газа понимается то, как будет формироваться начальная координата частицы. Это может быть точечный источник (тогда начальная координата всех частиц будет одна и та же), некоторая поверхность, например входное сечение, или объем.

Под законом распределения скоростей частицы обычно понимают угловое распределение, в качестве которого, как правило, принимается диффузный закон (косинусное распределение). Однако алгоритм метода позволяет изменять не только направление полета, но и скорость частицы в соответствии, например, с распределением Максвелла или любым другим;

- описание всех поверхностей структуры, включая вход и выход (если они есть).

Описания как такового не происходит, просто задаются ключевые точки и пределы некоторых типовых поверхностей, таких как плоская, цилиндрическая, коническая, сферическая. Например, чтобы описать сферическую поверхность, нужно задать координаты центра

сферы и ее радиус. Для конической поверхности нужно задать координаты вершины конуса и угол между его осью и образующей. Удобно пронумеровать все используемые в системе поверхности и определить их типы, например поверхность 1 — плоскость, поверхность 2 — сфера, ..., поверхность 6 — плоскость, ..., поверхность  $i$  — ... и т. д.;

- описание условий взаимодействия частиц с поверхностями — коэффициентов прилипания на каждой поверхности, законов распределения скоростей.

Коэффициенты прилипания описываются числом в пределах от 0 до 1, характеризующим вероятность прилипания. Это может быть как постоянная, заданная пользователем, так и переменная, получаемая как результат работы некоторой функции, например функции, изменяющей значение коэффициента прилипания в зависимости от числа накопленных частиц. Коэффициент прилипания обычно задается для каждой поверхности системы или ее фрагмента. Поэтому, учитывая номера поверхностей, задают массив коэффициентов прилипания  $\gamma_i$  для  $i$  от 1 до  $K$  ( $K$  — общее число поверхностей системы).

Задание законов распределения скоростей в данном случае аналогично описанному выше, однако здесь появляется возможность анализировать дальнейший полет частицы с учетом его предыдущей стадии. Хотя обычно эта возможность не используется, существуют задачи, где может потребоваться учет, например, угла падения или значения скорости для выработки следующей траектории. Впрочем подобные задачи в данной работе не описываются;

- описание условий окончания слежения за частицей, например, частица вылетела из системы прилипла на поверхности системы, с момента старта прошло определенное время и т. д.

При выполнении данного условия полученные результаты обрабатываются, добавляются к уже имеющейся статистике и осуществляется новый запуск;

- инициализация служебных параметров алгоритма.

Под служебными параметрами алгоритма понимаются переменные, которые активно используются в процессе вычислений, но не являются результатом. Такими служебными параметрами могут быть: время полета частицы (если его необходимо рассчитывать) — в начальный момент время полета обнуляется; начальное значение параметра  $t$  (описан ниже) — может быть равен нулю или, что предпочтительнее, радиусу молекулы (если он измеряется в метрах, то  $t=10^{-10}$  м); различные массивы, в которых будет происходить накопление данных, — их надо обнулить.

Кроме того, для расчета времени полета частицы используется значение скорости (см. п. 2.3.6).

**2. Розыгрыш координаты точки входа частицы в систему.** В зависимости от решаемой задачи частицы в начальный момент времени могут быть:

- внутри точечного источника, при этом начальные координаты всех частиц одинаковы и постоянны,
- равномерно распределены по плоскости, например, во входных сечениях трубопровода, ловушки, крионасоса. Равномерное распределение частиц по поверхности входного сечения соответствует присоединению анализируемой структуры к бесконечно большому объему.

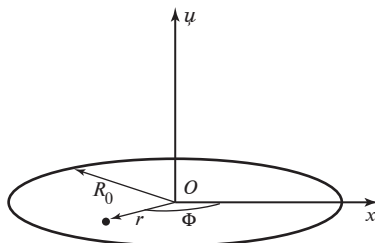


Рис. 2.10. Определение координаты точки входа частицы

Координатами точки входа частицы в круглое входное отверстие (рис. 2.10) являются угол  $\Phi$  и радиус  $r$ . Для обеспечения равновероятного входа частиц (молекул) по всей площади необходимо, чтобы угол  $\Phi$  был равномерно распределен в интервале от 0 до  $2\pi$ . Генерируя датчиком случайных чисел, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1, случайное число  $\xi \in [0,1]$ , получаем случайный угол

$$\Phi = 2\pi\xi[0,1]. \quad (2.12)$$

Для определения случайного радиуса входа молекулы в систему с помощью датчика случайных чисел генерируется значение  $\eta \in [0,1]$ , при этом получаем

$$r = R_0\sqrt{\eta[0,1]}, \quad (2.13)$$

где  $R_0$  — радиус входного отверстия.

Далее переходим к прямоугольной системе координат:

$$x = r\cos \Phi; \quad y = r\sin \Phi. \quad (2.14)$$

Фрагмент кода на языке Паскаль (выполненный в среде Delphi 3), реализующий данную функцию, показан ниже:

```
procedure GetStartL (var X,Y,Z,R,XC,YC,ZC:Extended);
var
  Fi,Ro:Extended;
label
  GetStartL1;
begin
  Fi:=2*Pi*Random;
```

```

GetStartL1:
  Ro:=R*Sqrt(Random);
  if (Ro=0) then goto GetStartL1;
  X:=Ro*cos(Fi)+XC;
  Y:=Ro*sin(Fi)+YC;
  Z:=ZC;
end;

```

Здесь  $X, Y, Z$  — получаемые координаты точки старта;  $XC, YC, ZC$  — задаваемые координаты центра круглого сечения;  $R$  — радиус сечения;

- равномерно распределены внутри объема, например внутри сферы. Аналогично предыдущему случаю координатами точки входа частиц являются углы  $\Phi, \Psi$  и радиус  $r$ . Для обеспечения равновероятного распределения частиц во всем объеме необходимо, чтобы углы  $\Phi, \Psi$  были равномерно распределены в интервале от 0 до  $2\pi$ . Генерируя датчиком случайных чисел, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1, случайное число  $\xi [0,1]$ , получаем случайные значения углов

$$\Phi = 2\pi\xi[0,1], \Psi = 2\pi\xi[0,1],$$

причем упомянутые случайные числа разные, поскольку при каждом вызове функции датчика случайных чисел генерируется новое число.

Для определения случайного радиуса точки входа молекулы в систему с помощью датчика случайных чисел генерируется значение  $\eta[0,1]$ , при этом получаем

$$r = R_0\sqrt{\eta[0,1]},$$

где  $R_0$  — радиус сферического объема.

Далее переходим к прямоугольной системе координат:

$$x = r\cos\Phi\sin\Psi; \quad y = r\sin\Phi\sin\Psi; \quad z = r\cos\Psi.$$

Фрагмент кода на языке Паскаль (выполненный в среде Delphi 3), реализующий данную функцию, показан ниже:

```

procedure GetStartV(var X,Y,Z,R,XC,YC,ZC:Extended);
var
  Fi,Ro,Psi,Aa:Extended;
label
  GetStartV1;
begin
  Fi:=2*Pi*Random;
  Psi:=2*Pi*Random;
  GetStartV1:

```



```

Aa:=Random;
if (Aa=0) then goto GetStartV1;
Ro:=R*Exp (Ln (Aa) / 3) ;
X:=Ro*Cos (Fi) *Sin (Psi)+XC;
Y:=Ro*Sin (Fi) *Sin (Psi)+YC;
Z:=Ro*Cos (Psi)+ZC;
end;

```

Здесь  $X, Y, Z$  — получаемые координаты точки старта;  $X_C, Y_C, Z_C$  — задаваемые координаты центра сферического объема;  $R$  — его радиус.

**3. Выбор направления полета частицы.** Направление вектора скорости частицы  $\mathbf{v}$  определяется двумя углами  $\psi$  и  $\theta$  (рис. 2.11). Угол  $\psi$  образован осью  $x'$  и проекцией вектора скорости на плоскость  $x'Oy'$ . Угол  $\theta$  находится между осью  $z'$  и вектором скорости  $\mathbf{v}$ . В соответствии с принятым диффузным законом распределения случайный угол  $\psi$  равномерно распределен в интервале от 0 до  $2\pi$ :

$$\psi = 2\pi\xi[0,1],$$

а для нахождения случайного угла  $\theta$ , который подчиняется диффузному закону рассеяния, необходимо воспользоваться выражением

$$\theta = \arcsin \sqrt{\eta[0,1]}. \quad (2.15)$$

Фрагмент кода на языке Паскаль (выполненный в среде Delphi 3), реализующий данную функцию, показан ниже:

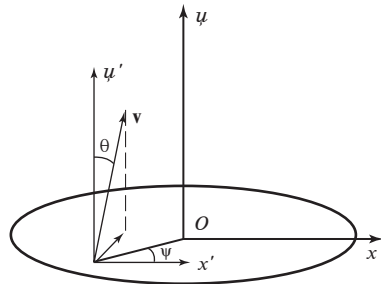
```

procedure GetAngleDiff(var P,T:Extended);
begin
  P:=2*Pi*Random;
  T:=ArcSin (Sqrt (Random) );
end;

```

Здесь переменные  $P$  и  $T$  соответствуют углам  $\psi$  и  $\theta$ .

Угловое распределение частиц может быть не только диффузным. Однако с точки зрения построения программы при изменении типа углового распределения изменится только одна строка, в которой определяется угол  $\theta$  (во фрагменте кода переменная  $T$ ). Подробно о разных типах распределения см. п. 2.3.4.



**Рис. 2.11.** Определение направления полета частицы

Траектория полета частицы представляет собой прямую линию, для которой систему параметрических уравнений представим в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_c t; \\ y = y_0 + m_c t; \\ z = z_0 + n_c t, \end{cases} \quad (2.16)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — координаты точки вылета частицы;  $l_c, m_c, n_c$  — направляющие косинусы, определяющие направление полета;  $t$  — параметр;  $x, y, z$  — координаты возможной точки «посадки».

Таким образом, выбор направления полета частицы сводится к определению значений направляющих косинусов, которые зависят, во-первых, от положения точки вылета в пространстве (необходимо учитывать тип поверхности вылета: плоскостная, цилиндрическая, коническая, сферическая — и углы наклона касательной плоскости к глобальным осям), а во-вторых, от описанных выше углов  $\psi$  и  $\theta$ , которые определяют направление вылета с касательной плоскости.

Направляющие косинусы рассчитываются по следующим соотношениям.

Формулы для нахождения направляющих косинусов при вылете с плоскости, заданной как  $z = c$ , имеют вид:

$$\begin{cases} l_c = \sin \theta \cos \psi; \\ m_c = \sin \theta \sin \psi; \\ n_c = \cos \theta, \end{cases} \quad (2.17)$$

где  $\theta = \arcsin \sqrt{\xi}$ ,  $\psi = 2\pi\xi$  — углы, определяющие направление вылета (здесь  $\xi$  — случайное число, генерируемое датчиком).

Для нахождения направляющих косинусов при старте с цилиндрической поверхности, заданной в виде  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , используются формулы:

$$\begin{cases} l_c = \sin \theta \sin \psi \sin \alpha_x - \cos \theta \cos \alpha_x; \\ m_c = \sin \theta \sin \psi \cos \alpha_x + \cos \theta \sin \alpha_x; \\ n_c = \sin \theta \cos \psi, \end{cases} \quad (2.18)$$

где  $\alpha_x = \arctg\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$  — угол наклона радиуса-вектора  $(x_0, y_0)$  к оси  $Ox$ .

Направляющие косинусы при старте с конической или сферической поверхности определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
l_c &= \sin \theta \sin \psi \sin \alpha_x - \sin \theta \cos \psi \sin \gamma_z \cos \alpha_x - \cos \theta \cos \gamma_z \cos \alpha_x; \\
m_c &= \sin \theta \sin \psi \cos \alpha_x + \sin \theta \cos \psi \sin \gamma_z \sin \alpha_x + \cos \theta \cos \gamma_z \sin \alpha_x; \quad (2.19) \\
n_c &= \sin \theta \cos \psi,
\end{aligned}$$

где  $\gamma_z = \arctg\left(\frac{x_0}{z_0}\right)$  — угол наклона радиуса-вектора  $(x_0, z_0)$  к оси  $Oz$

или угол между осью  $Oz$  и образующей конуса.

Фрагмент кода на языке Паскаль (выполненный в среде Delphi 3), реализующий функцию нахождения направляющих косинусов в зависимости от типа поверхности (аргумент P: 1 — плоскость  $z = c$ ; 2 — цилиндр; 3 — конус или сфера), углов, определяющих направление вылета,  $\psi$  и  $\theta$  (вызов процедуры GetAngleDiff) и углов  $\alpha_x$  и  $\gamma_z$  (аргументы A и G соответственно), показан ниже:

```

procedure UpdateDirect(var P:Integer; A,G:Extended);
var
  Psi,Tetta:Extended;
label UpdateDirect1;
begin
UpdateDirect1:
  GetAngleDiff(Psi,Tetta); // отдельно вызывать не нужно
  Case P of
    1:
      begin
        NCos:=Cos(Tetta);

// Направляющие косинусы в зависимости от
        LCos:=Sin(Tetta)*Cos(Psi); // типа поверхности
P: 1-плоскость z=c 2-цилиндр x2+y2=rc2
        MCos:=Sin(Tetta)*Sin(Psi);

// 3-конус, сфера или плоскость, заданная уравнением
// ax+by+cz+d=0
      end;
    2:
      begin
        NCos:=Sin(Tetta)*Sin(Psi);
        LCos:=Sin(Tetta)*Cos(Psi)*Cos(A)-Cos(Tetta)*Sin(A);
        MCos:=Sin(Tetta)*Cos(Psi)*Sin(A)+Cos(Tetta)*Cos(A);
      end;
    3:
      begin

```

```

    NCos:=Cos (Tetta) *Sin (G) -Sin (Tetta) *Cos (Psi) *Cos (G) ;
    LCos:=Sin (Tetta) *Sin (Psi) *Sin (A) -
Sin (Tetta) *Cos (Psi) *Sin (G) *Cos (A) -
Cos (Tetta) *Cos (G) *Cos (A) ;
MCoS:=Sin (Tetta) *Sin (Psi) *Cos (A) +Sin (Tetta) *Cos (Psi)
*Sin (G) *Sin (A) +Cos (Tetta) *Cos (G) *Sin (A) ;
    end;
end;
if ((NCos=0) or (LCos=0) or (MCoS=0)) then goto
UpdateDirect1;
end;

```

Значения аргументов  $A$  и  $G$  данной функции можно задавать вручную или с помощью функции. Эта функция должна определять значения углов  $\alpha_x$  и  $\gamma_z$  в зависимости от текущих координат частицы и от рода поверхности, на которой эта частица в данный момент находится.

#### **4. Нахождение точки столкновения частицы со стенкой:**

- формирование массива параметров  $t$ . После того как будут найдены направляющие косинусы, необходимо определить координаты точек пересечения траектории полета (прямой) с поверхностями системы. Запишем уравнения траектории полета:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_c t; \\ y = y_0 + m_c t; \\ z = z_0 + n_c t. \end{cases}$$

В данный момент известными величинами являются координаты точки вылета  $(x_0, y_0, z_0)$  и направляющие косинусы  $l_c, m_c, n_c$ . Для того, чтобы найти координаты точек пересечения этой прямой с поверхностями структуры, нужно решить  $K$  систем уравнений вида:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_c t; \\ y = y_0 + m_c t; \\ z = z_0 + n_c t; \\ F_i(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

где  $i$  — номер поверхности структуры, причем  $1 < i < K$ .

Решениями этих систем будет массив параметров  $t$ . Формулы для нахождения значения параметра  $t$  при пересечении разных типов поверхностей приведены ниже.

Для нахождения параметра  $t$  при пересечении плоскости используем формулу

$$t = - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{al_c + bm_c + cn_c}, \quad (2.21)$$

где  $a, b, c, d$  — члены уравнения плоскости вида  $ax + by + cz + d = 0$ ;  $x_0, y_0, z_0$  — координаты точки вылета;  $l_c, m_c, n_c$  — направляющие косинусы траектории полета.

Формула для определения параметра  $t$  при пересечении цилиндра, заданного в виде  $x^2 + y^2 + z^2 = r_c^2$ , имеет следующий вид:

$$t = \frac{-(x_0 l_c + y_0 m_c) \pm \sqrt{(x_0 l_c + y_0 m_c)^2 - (l_c^2 + m_c^2)(x_0^2 + y_0^2 - r_c^2)}}{l_c^2 + m_c^2}, \quad (2.22)$$

где  $r_c$  — радиус основания цилиндра.

Параметр  $t$  при пересечении сферы, заданной в виде  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r_s^2$ , находим по формуле

$$t = \frac{-(l_c(x_0 - x_c) + m_c(y_0 - y_c) + n_c(z_0 - z_c)) \pm \sqrt{(l_c(x_0 - x_c) + m_c(y_0 - y_c) + n_c(z_0 - z_c))^2 - ((x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 + (z_0 - z_c)^2 - r_s^2)}}{-((x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 + (z_0 - z_c)^2 - r_s^2)}, \quad (2.23)$$

где  $r_s$  — радиус сферы;  $x_c, y_c, z_c$  — координаты центра сферы.

Для нахождения параметра  $t$  при пересечении конуса  $[(z - c)^2 = \text{tg}^2 \gamma_z (x^2 + y^2)]$  применяем формулу

$$t = \frac{-(x_0 l_c + y_0 m_c - \text{tg}^2 \gamma_z n_c (z_0 - c)) \pm \sqrt{(x_0 l_c + y_0 m_c - \text{tg}^2 \gamma_z n_c (z_0 - c))^2 - (l_c^2 + m_c^2 - \text{tg}^2 \gamma_z n_c^2) \times (x_0^2 + y_0^2 - \text{tg}^2 \gamma_z (z_0 - c)^2)}}{l_c^2 + m_c^2 - \text{tg}^2 \gamma_z n_c^2}$$

где  $c$  — координата вершины конуса по оси  $Oz$ ;  $\gamma_z$  — угол между образующей конуса и осью  $Oz$ .

Для вычисления параметра  $t$  при пересечении траектории полета со всеми поверхностями используются одни и те же значения как направляющих косинусов, так и координат точки вылета, т. е. имея значения  $x_0, y_0, z_0$  и  $l_c, m_c, n_c$ , ищем значения  $t$  для всех поверхностей системы. Далее показаны фрагменты кода, реализующие вышеописанные функции нахождения  $t$  для различных типов поверхностей:

```
//Нахождение значения параметра t при пересечении любой
//плоскости, заданной уравнением ax+by+cz+d=0
//Аргументы: A, B, C, D — соответствующие члены уравнения
//плоскости; X, Y, Z — координаты точки вылета
//(x0, y0, z0); L, M, N — направляющие косинусы l, m, n.
```

```

function GetAnyLinearT(var
A,B,C,D,X,Y,Z,L,M,N:Extended): Extended;
begin
  if ((A*L+B*M+C*N)=0) then GetAnyLinearT:=0 else
GetAnyLinearT:=- (A*X+B*Y+C*Z+D) / (A*L+B*M+C*N);
end;

//Нахождение значения параметра t при пересечении
//плоскости, заданной как z=c
//Аргументы: C – соответствующий член уравнения
//плоскости; Z – координата точки вылета z0;
//N – направляющий косинус n.
function GetLinearT(var C,Z,N:Extended): Extended;
begin
  if (N=0) then GetLinearT:=0 else GetLinearT:=(C-
Z)/N;
end;

//Нахождение значения первого параметра t при пересечении
//цилиндра, заданного уравнением  $x^2+y^2=r_c^2$ 
//Аргументы: X, Y – координаты точки вылета x0, y0;
//L, M – направляющие косинусы l, m;
//R – радиус основания цилиндра rc.
function GetCylinderTP(var X,Y,L,M,R:Extended):
Extended;
begin
  if (((X*L+Y*M)*(X*L+Y*M)-(L*L+M*M)*(X*X+Y*Y-
R*R))<0) or ((L*L+M*M)=0))
  then GetCylinderTP:=0
  else GetCylinderTP:=(-
(X*L+Y*M)+Sqrt(((X*L+Y*M)*(X*L+Y*M)-
(L*L+M*M)*(X*X+Y*Y-R*R))))/(L*L+M*M);
end;

//Нахождение значения второго параметра t при пересечении
//цилиндра, заданного уравнением  $x^2+y^2=r_c^2$ 
//Аргументы: X, Y – координаты точки вылета x0, y0;
//L, M – направляющие косинусы l, m;
//R – радиус основания цилиндра rc.
function GetCylinderTM(var X,Y,L,M,R:Extended):
Extended;
begin
  if (((X*L+Y*M)*(X*L+Y*M)-(L*L+M*M)*(X*X+Y*Y-
R*R))<0) or ((L*L+M*M)=0))
  then GetCylinderTM:=0
  else GetCylinderTM:=(- (X*L+Y*M)-

```

```

Sqrt(((X*L+Y*M)*(X*L+Y*M)-(L*L+M*M)*(X*X+Y*Y-R*R))))/(L*L+M*M);
end;

//Нахождение значения первого параметра t при пересечении
//сферы, заданной уравнением  $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r_s^2$ 
//Аргументы: X, Y, Z- координаты точки вылета ( $x_0, y_0, z_0$ );
//L, M, N - направляющие косинусы  $l, m, n$ ;
//XC, YC, ZC - координаты центра сферы ( $x_c, y_c, z_c$ );
//R - радиус сферы  $r_s$ .
function GetSphereTP(var
X,Y,Z,L,M,N,R,XC,YC,ZC:Extended): Extended;
begin
  if (((X-XC)*L+(Y-YC)*M+N*(Z-ZC))*((X-XC)*L+(Y-
YC)*M+N*(Z-ZC))-((X-XC)*(X-XC)+(Y-YC)*(Y-YC)+(Z-
ZC)*(Z-ZC)-R*R))<0)
  then GetSphereTP:=0
  else GetSphereTP:=- (L*(X-XC)+M*(Y-YC)+N*(Z-
ZC))+Sqrt(((X-XC)*L+(Y-YC)*M+N*(Z-ZC))*((X-
XC)*L+(Y-YC)*M+N*(Z-ZC))-((X-XC)*(X-XC)+(Y-YC)*(Y-
YC)+(Z-ZC)*(Z-ZC)-R*R));
end;

//Нахождение значения второго параметра t при пересечении
//сферы, заданной уравнением  $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r_s^2$ 
//Аргументы: X, Y, Z- координаты точки вылета ( $x_0, y_0, z_0$ );
//L, M, N - направляющие косинусы  $l, m, n$ ;
//XC, YC, ZC - координаты центра сферы( $x_c, y_c, z_c$ );
//R - радиус сферы  $r_s$ .
function GetSphereTM(var
X,Y,Z,L,M,N,R,XC,YC,ZC:Extended): Extended;
begin
  if (((X-XC)*L+(Y-YC)*M+N*(Z-ZC))*((X-XC)*L+(Y-
YC)*M+N*(Z-ZC))-((X-XC)*(X-XC)+(Y-YC)*(Y-YC)+(Z-
ZC)*(Z-ZC)-R*R))<0)
  then GetSphereTM:=0
  else GetSphereTM:=- (L*(X-XC)+M*(Y-YC)+N*(Z-ZC))-
Sqrt(((X-XC)*L+(Y-YC)*M+N*(Z-ZC))*((X-XC)*L+(Y-
YC)*M+N*(Z-ZC))-((X-XC)*(X-XC)+(Y-YC)*(Y-YC)+(Z-
ZC)*(Z-ZC)-R*R));
end;

//Нахождение значения первого параметра t при пересечении
//конуса, заданного уравнением  $(z-c)^2=ctg^2\gamma(x^2+y^2)$ 
//Аргументы: X, Y, Z- координаты точки вылета ( $x_0, y_0, z_0$ );
//L, M, N - направляющие косинусы  $l, m, n$ ;

```

```

//C – соответствующий член уравнения конуса c;
//G – угол  $\gamma$  в уравнении конуса.
function GetConusTM(var X,Y,Z,L,M,N,C,G:Extended) :
Extended;
begin
  if ( ( (X*L+Y*M-Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-C)) * (X*L+Y*M-
Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-C)) - (L*L+M*M-
Tan(G)*Tan(G)*N*N) * (X*X+Y*Y-Tan(G)*Tan(G)*(Z-
C)*(Z-C)) ) < 0)
  then GetConusTM:=0
  else GetConusTM:=(- (X*L+Y*M-Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-
C))-sqrt( ( (X*L+Y*M-Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-
C)) * (X*L+Y*M-Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-C)) - (L*L+M*M-
Tan(G)*Tan(G)*N*N) * (X*X+Y*Y-Tan(G)*Tan(G)*(Z-
C)*(Z-C)) ) ) ) / (L*L+M*M-Tan(G)*Tan(G)*N*N) ;
end;

//Нахождение значения второго параметра t при пересечении
//конуса, заданного уравнением  $(z-c)^2 = \text{ctg}^2 \gamma (x^2 + y^2)$ 
//Аргументы: X, Y, Z- координаты точки вылета ( $x_0, y_0, z_0$ );
//L, M, N – направляющие косинусы l, m, n;
//C – соответствующий член уравнения конуса c;
//G – угол  $\gamma$  в уравнении конуса.
function GetConusTP(var X,Y,Z,L,M,N,C,G:Extended) :
Extended;
begin
  if ( ( (X*L+Y*M-Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-C)) * (X*L+Y*M-
Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-C)) - (L*L+M*M-
Tan(G)*Tan(G)*N*N) * (X*X+Y*Y-Tan(G)*Tan(G)*(Z-
C)*(Z-C)) ) < 0)
  then GetConusTP:=0
  else GetConusTP:=(- (X*L+Y*M-Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-
C))+sqrt( ( (X*L+Y*M-Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-
C)) * (X*L+Y*M-Tan(G)*Tan(G)*N*(Z-C)) - (L*L+M*M-
Tan(G)*Tan(G)*N*N) * (X*X+Y*Y-Tan(G)*Tan(G)*(Z-
C)*(Z-C)) ) ) ) / (L*L+M*M-Tan(G)*Tan(G)*N*N) ;
end;

```

Нужно отметить, что для поверхностей, описываемых уравнениями второго порядка (цилиндрической, конической, сферической), присутствуют по две функции. Поскольку эти поверхности могут иметь две точки пересечения с прямой, то для них параметр  $t$  может приобретать два разных значения;

- поиск параметра, соответствующего точке столкновения.



Далее после формирования массива параметров  $t$  для всех поверхностей системы необходимо найти параметр, соответствующий точке столкновения. Для этого нужно определить минимальный по модулю параметр  $t$ , причем значения  $x, y, z$ , найденные по уравнениям

$$\begin{cases} x = x_0 + l_c t; \\ y = y_0 + m_c t; \\ z = z_0 + n_c t, \end{cases}$$

должны попадать в пределы, установленные для поверхности, соответствующей данному значению  $t$ , например продольная координата для цилиндра не должна быть меньше 0 или больше длины цилиндра.

Поиск минимального удовлетворяющего всем вышеописанным условиям значения ведется следующим образом:

1) задается некоторое начальное значение  $t$ . Например,  $t = 1^{-10}$  м, т.е.  $t$  присваивается значение радиуса молекулы (см. п. 1);

2) ищется параметр  $t$ , значение которого по модулю минимально, но больше значения (по модулю) текущего  $t$  (задается аргументом P). Код этой функции представлен ниже:

```
function FindMinimumT(var P:Extended; S:Integer):
LongInt;
var
  M:Extended;
  K,i:LongInt;
begin
  K:=0;
  M:=1e24;
  for i:=1 to SizeTParameter do
    begin
      if ((Abs(TParameter[i])<M) and
(Abs(TParameter[i])>Abs(P)) and ((TParameter[i]*S)>=0)) then
        begin
          K:=i;
          M:=Abs(TParameter[i]);
        end;
    end;
  FindMinimumT:=K;
end;
```

Здесь нужно обратить внимание на аргумент  $S$  (может принимать следующие значения:  $-1, 0, 1$ ). Он задает необходимый для поиска знак параметра, т.е. можно искать параметр  $t$  с любым знаком ( $S = 0$ ), меньше нуля ( $S = -1$ ) или больше нуля ( $S = 1$ ). Обычно используется значение  $S = 0$ , но бывают случаи, когда необходимо отсекал значения параметра  $t$  с определенным знаком. Эти задачи будут рассмотрены позже;

3) анализируются координаты возможной точки столкновения.

Для этого по уравнениям

$$\begin{cases} x = x_0 + l_c t; \\ y = y_0 + m_c t; \\ z = z_0 + n_c t \end{cases}$$

находятся значения возможных координат  $x, y, z$ . Затем они проверяются на принадлежность поверхности, которой соответствует найденный выше параметр  $t$ . Например, значение координаты  $z$  для цилиндра должно быть больше 0 и меньше длины цилиндра. Если найденная точка не попадает в пределы соответствующей поверхности, то процесс повторяется с подп. 2), причем в качестве текущего значения  $t$  выбирается только что найденный. Если же найденная точка попадает в пределы, то переходим к следующему подпункту;

4) координаты точки столкновения частицы со стенкой системы  $x, y, z$  найдены.

После того как стало понятно, что частица перелетает именно в данную точку, может потребоваться в зависимости от типа задачи анализ времени, которое частица пробыла в полете.

**5. Анализ взаимодействия частицы с поверхностью.** Взаимодействие молекулы с поверхностью моделируется следующим образом. С помощью датчика генерируется случайное число  $\mu$ . Если  $\mu$  оказывается меньше или равно принятому коэффициенту прилипания  $\gamma_i$  на  $i$ -й поверхности ( $\mu \leq \gamma_i$ ), то молекула считается захваченной. Далее в зависимости от результатов анализа возможен переход на любую из следующих ветвей:

- частица не осталась на поверхности. Тогда координаты  $(x_0, y_0, z_0)$  равны координатам  $(x, y, z)$ . Переходим к п. 3;
- частица прилипла к поверхности. На данном этапе происходит анализ различных параметров данной частицы, таких как координаты, номер поверхности, на которой осталась частица, значения направляющих косинусов, время полета и др. Это необходимо для пополнения некоего «банка данных» анализируемой системы для дальнейшей

статистической обработки. Такими «данными» могут служить координаты точки, значения направляющих косинусов, с которыми частица пришла в данную точку, пройденное частицей расстояние и др. Далее проверяется условие окончания расчета — последняя ли это испытанная частица, если нет, то берется следующая частица (счетчик частиц увеличивается на единицу) и производится переход к п. 1.

**6. Статистический анализ и вывод окончательных результатов.** Наиболее часто выполняемый анализ касается нахождения коэффициента Клаузинга или коэффициента захвата системы. Коэффициент захвата находится по формуле

$$K_{\text{захв}} = \frac{N_{\text{погл}}}{N_{\text{вх}}} = \frac{N_{\text{погл}}}{N_{\text{погл}} + N_{\text{выл}}},$$

где  $N_{\text{погл}}$  — число поглощенных системой частиц;  $N_{\text{вх}}$  — общее число испытанных частиц;  $N_{\text{выл}}$  — количество вылетевших из системы частиц. Коэффициент Клаузинга  $k_{\text{Кл}} = 1 - K_{\text{захв}}$ .

Подобный анализ может производиться для всей системы или для каких-то отдельных поверхностей. Кроме расчета коэффициентов захвата и Клаузинга могут строиться полярная диаграмма скоростей (если производилось накопление данных о направляющих косинусах), определяться структура пространственного распределения частиц (если накапливались данные о координатах) и другие макро- и микропараметры системы.

### 2.3.2. Построение полярных диаграмм скоростей частиц

Индикатрисы (полярных диаграмм) частиц могут понадобиться для анализа структуры потока в определенном месте анализируемой вакуумной системы. Например, может стоять задача сравнить структуры потока, формируемого испытательной камерой, и потока, формируемого бесконечно большим объемом. Или может потребоваться установить структуру потока, вылетающего из трубопровода, и сравнить ее со структурой потока на входе. Полярная диаграмма показывает вероятность вылета частицы в определенном направлении. Например, чаще всего индикатриса определяет вероятность вылета частицы в зависимости от угла между вектором скорости и нормалью к поверхности вылета.

Индикатрисы частиц строятся следующим образом. Выбирается поверхность, для которой необходимо построить полярные диаграммы скоростей частиц, причем частицы должны пересечь эту поверх-

ность или «перелететь» на нее. Обычно такой поверхностью служит входное или выходное сечение вакуумной системы — вход в крионасос, выход из трубопровода. В случае перелета на поверхность в процессе работы алгоритма уже найдены направляющие косинусы, которые определяют направление полета частицы к этой поверхности. Направляющие косинусы для перелета находились в п. 3, а тот факт, что частица перелетела на поверхность, для которой будет строиться индикатриса, фиксировался в подп. 4). И именно данные из п. 3 (т. е. уже известные) используются для построения индикатрисы.

После выбора поверхности, для которой будут строиться полярные диаграммы, определяется ось, параллельная нормали к этой поверхности. Наиболее часто индикатрисы строятся для поверхностей, перпендикулярных продольной оси  $Oz$ , поэтому именно эта ось в основном используется в качестве оси, вдоль которой анализируется структура потока. Для построения индикатрис в процессе работы алгоритма необходимо накапливать значения направляющих косинусов частиц, которые пересекают заданную поверхность. Если анализируется поток вдоль оси  $Oz$ , то надо накапливать данные о направляющем косинусе  $n_c$ , который определяет угол между направлением полета и осью  $Oz$ . Для оси  $Ox$  это будет направляющий косинус  $l_c$ , а для оси  $Oy$  — соответственно направляющий косинус  $m_c$ .

Далее весь угол, который лежит в интервале от 0 до  $90^\circ$ , делится на равные промежутки, например на 90 равных частей. Потом в процессе работы алгоритма определяются направляющие косинусы и соответствующие им углы и подсчитывается число частиц, которые при пересечении заданной поверхности имели угол вылета  $\alpha$ , равный 0—1, 1—2, 2—3° и т. д. Таким образом, в результате получается некоторый массив, который содержит число частиц, пересекающих заданную поверхность под определенным углом. Фрагмент кода на языке Паскаль, реализующий процесс такого накопления, показан ниже:

```
CosineIndex:=Trunc (Abs (ArcCos (Ncos) ) *CosinesSize)+1;  
Cosines [1, CosineIndex] :=Cosines [1, CosineIndex]+1;
```

Здесь  $Ncos$  — значение направляющего косинуса  $n$ ;  $CosinesSize$  — число частей, на которые дробится угол вылета, лежащий в интервале от 0 до  $90^\circ$  (в данном случае  $CosinesSize:=90$ );  $Cosines$  — массив, который в зависимости от номера элемента будет содержать число частиц, вылетающих под соответствующим углом: первый элемент содержит число частиц, вылетевших под углом от 0 до  $1^\circ$ , второй — число частиц, вылетевших под углом от  $1$  до  $2^\circ$ , третий — то же от  $2$  до  $3^\circ$  и т. д.

Имея подобный массив, построение сводим к следующему. Нормаль к поверхности определяет угол в  $0^\circ$ . Касательная к поверхности определяет угол в  $90^\circ$ . В соответствии с найденным массивом от нормали к поверхности откладываются углы и на сторонах этих углов отмечаются соответствующие значения числа частиц, вылетевших под этими углами (рис. 2.12). На рисунке жирными линиями показаны числа частиц для соответствующих углов. Далее конечные точки жирных линий соединяются, и эта соединительная линия и образует индикатрису частиц, пролетающих через заданную поверхность (штриховая линия на рис. 2.12).

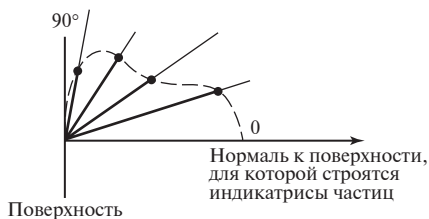


Рис. 2.12. Построение полярной диаграммы

Для построения индикатрисы частиц, пролетающих под углом через единицу площади заданной поверхности, необходимо элементы полученного массива умножить на площадь соответствующего шарового сегмента, которая пропорциональна синусу телесного угла, поэтому можно умножить элементы массива на синус соответствующего угла:

```
For CosineIndex:=1 to CosinesSize do
  Cosines[1,CosineIndex]:=Cosines[1,CosineIndex]*
  Sin(CosineIndex*(Pi/2)/CosinesSize);
```

Здесь `CosineIndex` — номер элемента массива от 1 до `CosinesSize`.

### 2.3.3. Нахождение пространственного распределения частиц

Пространственное распределение частиц можно находить в определенном сечении, например в выходном сечении трубопровода. Тогда координаты частиц фиксируются при достижении ими поверхности выходного сечения. А можно искать распределение частиц через некоторое время после старта. Тогда нужно задать время, по прошествии которого частицы будут останавливаться и будет происходить фиксация их положения.

Процесс нахождения пространственного распределения можно условно разбить на две части: 1) определение всех координат частицы и дальнейшее построение точечной диаграммы, на которой каждая

точка соответствует позиции одной частицы; 2) нахождение распределения частиц вдоль какой-то оси и построение графика, каждая точка которого определяет относительное число частиц на каком-то малом отрезке вдоль заданной оси.

В первом случае происходит просто фиксирование координат частицы в трех- или двумерном массиве в зависимости от решаемой задачи. Таким образом, получается массив размером, который определяется числом зафиксированных частиц. Он содержит значения координат.

Во втором случае необходимо накопление данных о числе частиц, координаты которых лежат в определенных пределах. Наиболее часто ищутся распределения частиц вдоль радиуса или продольной оси. Например, для определения распределения частиц в выходном сечении трубопровода вдоль радиуса нужно разбить радиус на некоторое число частей (*PartsNumber*). При этом само выходное сечение трубопровода разбивается на *PartsNumber* колец или *PartsNumber* шаровых слоев для трехмерного случая. И далее следует анализировать координаты каждой частицы в целях поиска координат ее радиуса-вектора и соответственно промежутка радиуса трубопровода, в который он попадает:

```
ParticleR:=Sqrt (CurrentX*CurrentX+CurrentY*CurrentY) ;
```

Здесь *ParticleR* — радиус-вектор частицы; *CurrentX* и *CurrentY* — координаты частицы. Для трехмерного случая внутрь функции квадратного корня вносится еще квадрат координаты *z*:

```
ParticleR:=Sqrt (CurrentX*CurrentX+  
CurrentY*CurrentY+CurrentZ*CurrentZ) ;
```

После определения координат радиуса-вектора частицы находится номер промежутка в сечении трубопровода, куда попала частица. Другими словами, находится номер кольца, в которое попала частица:

```
PartIndex:=Trunc (ParticleR*PartsNumber/TubeR)+1;
```

Здесь *PartIndex* — номер промежутка в сечении трубопровода (номер кольца); *TubeR* — радиус трубопровода.

Далее производится увеличение значения элемента массива, который характеризует число частиц, попавших в данное кольцо:

```
ParticlesNumber[PartIndex]:= ParticlesNum-  
ber[PartIndex]+1;
```

Здесь *ParticlesNumber* — массив, содержащий число частиц в разных кольцах выходного сечения в зависимости от радиуса (номера элемента).

Таким образом, в результате накопления данных получается массив, элементы которого содержат число частиц в кольцах с определенным радиусом. Радиус определяется номером элемента: так, радиус растет от 0 до  $\text{TubeR}$ , а номера элементов соответственно растут от 1 до  $\text{PartsNumber}$ .

Для определения концентрации частиц, т. е. числа частиц на единице площади (объема для трехмерного случая), нужно значение каждого элемента массива разделить на площадь соответствующего кольца (объем шарового слоя в трехмерном случае). Как площадь кольца, так и объем шарового слоя определяются внешним радиусом данного кольца или слоя и его толщиной. Так как толщина у всех колец (слоев) одинакова, то для определения относительной концентрации можно использовать только радиус соответствующего кольца (слоя). Если ищется относительная концентрация частиц, то можно использовать не значение радиуса, а значение номера элемента массива. Необходимый пересчет производится следующим образом:

```
For i:=1 to PartsNumber do
  ParticlesNumber[i]:= ParticlesNumber[i]/i;
```

### 2.3.4. Типы угловых распределений

Взаимодействие частицы с поверхностью происходит следующим образом. Столкнувшись с поверхностью, частица некоторое время находится на ней и потом, вылетая, уже «забывает» свой маршрут, по которому она летела до столкновения. Поэтому типы используемых в моделировании угловых распределений не учитывают угол падения частицы на поверхность, как это происходит, например, в зеркальном распределении — угол падения равен углу отражения.

Обычно при моделировании используются три основных типа углового распределения: диффузное (косинусный закон), лепестковое и равномерное. Графическое изображение этих распределений приведено на рис. 2.13.

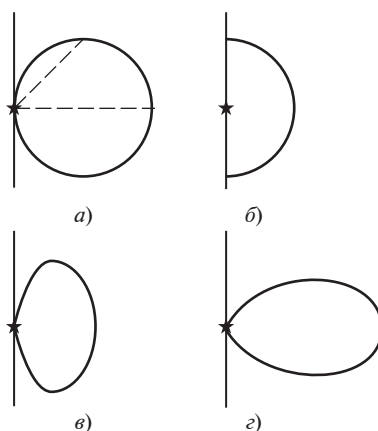


Рис. 2.13. Диаграммы направлений полета частиц для разных угловых распределений: а – диффузное; б – равномерное; в и г – лепестковое

Здесь положение частицы отмечено звездочкой, а графики показывают вероятность вылета частицы в определенном направлении. Например, для диффузного распределения самое большое число частиц летит в направлении, перпендикулярном поверхности (на рисунке показано штриховой линией). Как видно, эта линия между положением частицы и графиком, определяющим вероятность, самая длинная. Меньшая вероятность у частицы вылететь в направлении, показанном на рисунке пунктирной линией — она короче, чем штриховая. Таким же образом вероятность вылета в определенном направлении находится и для других распределений. Однако стоит учесть, что на самом деле эти графики не плоские, а объемные, например для диффузного распределения график представляет собой не окружность, а сферическую поверхность.

Направление вылета частицы с поверхности определяется двумя углами (см. рис. 2.11). Угол  $\theta$ , образованный траекторией полета и нормалью к касательной плоскости, зависит от типа распределения (табл. 2.2). Угол  $\psi$  — угол поворота направления вылета относительно оси, поперечной нормали, — обычно распределен равномерно в пределах  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ .

В формулах, показанных в табл. 2.2, показатель  $a$  характеризует тип лепесткового распределения: если  $a = 1$ , то лепестковое распределение вырождается в диффузное (рис. 2.13, а), если  $0 < a < 1$ , то диффузное распределение как бы «сплющивается» (рис. 2.13, в), а если  $a > 1$ , то, наоборот, «вытягивается» (рис. 2.13, г). При  $a = 0$  лепестковое распределение вырождается в равномерное (рис. 2.13, б).

Таким образом, чем ближе значение показателя  $a$  к нулю, тем более «сплюснутый» характер имеет распределение и соответственно тем выше вероятность вылета частицы в направлении по касательной к поверхности и ниже в направлении, перпендикулярном поверхности. Чем больше значение показателя  $a$ , тем более вытянутым становится «язык» и соответственно выше вероятность вылета в направлении по нормали к поверхности и ниже — по касательной.

Таблица 2.2

**Формулы для углов, определяющих направление вылета частицы с поверхности,  $0 \leq \theta \leq \pi$  и  $0 \leq \psi \leq 2\pi$  ( $\xi$  и  $\chi$  — случайные числа)**

Тип распределения	Формула
Диффузное	$\theta = \arcsin \sqrt{\xi}$
Лепестковое	$\theta = \arccos^{(a+1)} \sqrt{1 - \xi}$
Равномерное	$\theta = \arccos \xi$
Все типы	$\psi = 2\pi\chi$



Таким образом, изменяя в алгоритме уравнения нахождения углов, определяющих направление вылета, можно варьировать характер распределения; при этом надо отметить, что в реальном алгоритме могут использоваться сразу несколько разных типов распределений. Например, на разных поверхностях системы могут быть заданы разные типы угловых распределений.

### 2.3.5. Учет времени полета частицы

Расстояние, которое пролетает частица, равно модулю полученного значения параметра  $t$ . Параметр  $t$  измеряется в тех единицах, в которых описываются геометрические характеристики системы. Таким образом, время полета частицы от точки до точки определяется как  $\tau = |t|/v$ , где  $v$  — скорость частицы. Как правило, для расчетов достаточно задать одинаковую для всех частиц постоянную скорость. Если необходимо проанализировать общее время полета частицы с начала старта, то соответствующие значения времени полета от точки до точки надо просуммировать.

Для некоторых задач может потребоваться фиксирование координат частицы через некоторое время TimeH после старта. Для этого перед каждым суммированием нужно сделать следующую проверку:

```
if ((Abs(PossibleTValue)+CurrentDistanceS)>=DistanceS)
\\ Время TimeH (расстояние DistanceS) наступает до того, как
    then
\\ частица достигнет следующей
        begin
\\ поверхности?
\\ Если «да», то три следующие строки определяют
\\ координаты точки, в которой частица будет в момент
\\ времени TimeH
            StopXS:=CurrentX+LCos*(DistanceS-
CurrentDistanceS)*(PossibleTValue/Abs(PossibleTValue));
            StopYS:=CurrentY+M Cos*(DistanceS-
CurrentDistanceS)*(PossibleTValue/Abs(PossibleTValue));
            StopZS:=CurrentZ+NCos*(DistanceS-
CurrentDistanceS)*(PossibleTValue/Abs(PossibleTValue)).
\\ Здесь нужно поместить действия с полученными координатами.
            CurrentDistanceS:=0;
\\ Пройденное расстояние можно снова обнулить,
\\ если нужно отсекать
        end
\\ позицию частицы через определенное время
\\ (как, например, при поиске давления).
```

```

else
begin
\\ Если «нет», то происходит добавление к общему
\\расстоянию (CurrentDistanceS) модуля текущего значения
\\параметра t (PossibleTValue) и вычисления продолжаются
CurrentDis-
tanceS:=CurrentDistanceS+Abs (PossibleTValue) ;
end;

```

Здесь PossibleTValue — значение параметра  $t$ , соответствующее следующей точке; CurrentDistanceS — уже пройденное частицей расстояние с начала старта; DistanceS — расстояние, которое должна пролететь частица до наступления времени TimeH: DistanceS:=TimeH\*v; StopXS, StopYS, StopZS — координаты частицы в момент времени TimeH.

Координаты, соответствующие времени TimeH, находятся уменьшением значения параметра  $t$  с сохранением его знака.

### 2.3.6. Учет скорости частицы

При расчетах молекулярных потоков бывает необходимо задавать скорость частицы. В подавляющем большинстве случаев достаточно задать общее для всех частиц постоянное ее значение. Обычно в качестве скорости частицы используется тепловая скорость молекулы:

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Здесь  $T$  — температура газа, К;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана;  $m$  — масса молекулы газа, кг.

Для некоторых задач может понадобиться моделирование значения скорости для каждой частицы отдельно в соответствии с заданным распределением. Если аналитически вывести формулу для нахождения случайного значения скорости из заданного распределения трудно, то можно воспользоваться методом исключения. Чтобы непосредственно использовать случайное число, функцию распределения делят на ее максимальное значение:

$$f'_x = \frac{f_x}{f_{\max}}.$$

Значение  $x$  (или значения, так как функция распределения может зависеть от многих переменных, например функция распределения Максвелла зависит от трех составляющих скорости) выбирается случайно в предположении, что оно равномерно распределено в определенных пределах. Для функции Максвелла случайно генерируются

значения всех трех компонент скорости. Они генерируются независимо друг от друга. При расчете может возникнуть проблема с заданием пределов переменных. Так, компоненты скорости в распределении Максвелла распределены от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поэтому для качественных расчетов нужно подобрать пределы, в которых находится основная часть получаемых значений. Такие пределы легко подобрать, зная характер функции распределения. Для функции распределения Максвелла большая часть значений лежит в окрестности нуля, поэтому отдаляться от него очень далеко не стоит. Обычно в зависимости от типа газа для распределения Максвелла пределы значений скорости могут составлять от сотен до тысяч метров в секунду.

После того как будет вычислена функция распределения  $f_x$  для найденного случайного значения  $x$ , определяется функция  $f'_x$ . Затем генерируется очередное случайное число  $\xi$ . Выбранное значение  $x$  либо принимается, либо отвергается в зависимости от того,  $f'_x > \xi$  или  $f'_x < \xi$ . Если  $f'_x < \xi$ , то значение  $x$  принимается как удовлетворяющее принятому распределению. Если  $f'_x > \xi$ , то значение  $x$  не принимается и операция повторяется: генерируется новое значение (значения)  $x$ , вычисляются  $f_x$  и  $f'_x$  и т. д.

Для функции распределения Максвелла  $f'_x = \exp(-\beta^2 v_1^2)$ , где  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2RT}}$ ;  $T$  — температура молекулы;  $v_1$  — одна из трех компонент скорости  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ . Равномерное распределение значений  $v_1$  задается формулой  $v_1 = a + \xi(b - a)$ . При этом для  $a$  и  $b$  выбираются некоторые конечные значения вместо реальных пределов (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Если положить  $a$  и  $b$  равными  $-\beta/10$  и  $\beta/10$  соответственно, то часть значений, лежащих за этими пределами, равна  $1 - \operatorname{erf}(10)$ , т.е. очень мала. Таким образом,  $v_1 = (-10 + 20\xi)/\beta$  и  $f_{v_1} = \exp\{-(\beta v_1)^2\}$ . Генерируется очередное значение  $\xi$ ; если  $f_{v_1} > \xi$ , то  $v_1$  принимается. Если  $f_{v_1} < \xi$ , то значение  $v_1$  отвергается и весь процесс повторяется до тех пор, пока очередное значение не будет принято.

Затем аналогичные процедуры повторяются для второй  $v_2$  и третьей  $v_3$  компонент скорости. Процедура генерации трех компонент скорости по распределению Максвелла показана ниже:

```

Procedure GetMaxwellDistr (Var V1, V2, V3, Betta:
Extended);
Var
FsV: Extended;
Label
V1R;
Label
V2R;
Label
V3R;
begin
V1R:
V1:=(-10+20*Random)/Betta;
FsV:=Exp(-V1*V1*Betta*Betta);
if (FsV<Random) then goto V1R;
V2R:
V2:=(-10+20*Random)/Betta;
FsV:=Exp(-V2*V2*Betta*Betta);
if (FsV<Random) then goto V2R;
V3R:
V3:=(-10+20*Random)/Betta;
FsV:=Exp(-V3*V3*Betta*Betta);
if (FsV<Random) then goto V3R;
end;

```

### 2.3.7. Определение распределения концентрации и давления

Для определения распределения давления внутри анализируемой системы существуют два основных подхода [2, 3].

Первый состоит в нахождении числа соударений частиц с фрагментом стенки вакуумной системы. Затем на основании этой информации находится распределение давления. Главным недостатком такого подхода является то, что полученный результат характеризует распределение давления только вблизи стенок вакуумной системы. Однако такой метод вполне применим, если необходимо предсказать значение давления, которое будет показано датчиком, прикрепленным к стенке, например к стенке трубопровода. Достоинством данного подхода является крайняя простота его реализации. Анализируемая система делится на несколько зон. Например, трубопровод делится на десять одинаковых частей. Затем в процессе расчета проводимости подсчитывается число ударов (взаимодействий) частиц с каждой из десяти частей. Удобно сделать этот расчет в зависимости от продоль-

ной координаты  $z$ : область  $a_1 < z < b_1$  соответствует первой части, область  $a_2 < z < b_2$  — второй и т. д. Зная общее число пробных частиц (например, 10 000), получаем следующий массив  $ZN_i = \frac{N_i}{N_{\text{общ}} F_i}$ , где

$N_i$  — число взаимодействий (соударений) в  $i$ -й зоне;  $N_{\text{общ}}$  — общее число пробных частиц;  $F_i$  — площадь  $i$ -й части. Затем, умножив каждый элемент этого массива на значение общего потока молекул  $Q_{\text{общ}}$ , молекул/с, получим число соударений молекул с единичной поверхностью в секунду для каждой части:  $v_i = ZN_i Q_{\text{общ}}$ . Зная молярную массу молекул  $\mu$  и температуру газа  $T$ , можно получить значения давления вблизи стенок для каждой части:  $p_i = v_i k \sqrt{\frac{2\pi MT}{R}}$ .

Полученный массив значений давления  $p_i$  для нескольких зон характеризует распределение давления вблизи стенок в данных зонах. Подсчет числа соударений удобно вести в том месте алгоритма, где происходит анализ взаимодействия частицы с поверхностью.

Реализация второго подхода более сложна, однако он дает возможность определять трехмерное поле концентрации. Суть данного подхода состоит в следующем. Задается некоторое значение времени

$\Delta t$  с условием, чтобы  $\Delta t > \frac{L}{v}$ , где  $L$  — характерный линейный размер анализируемой вакуумной системы;  $v$  — скорость молекул; причем

лучше, если будет выполняться условие  $\Delta t \geq 2 \frac{L}{v}$ . После этого вся

система так же, как и в предыдущем методе, разбивается на части с той лишь разницей, что теперь эти части объемные, т. е. характеризуются тремя координатами. В начале расчета задается скорость частиц. После запуска частицы начинается подсчет пройденного ею расстояния. Для этого удобно пользоваться параметром  $t$ , поскольку модуль его значения — это расстояние от точки старта частицы до точки финиша. Так, если частица вылетела с поверхности из точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и перелетела на другую поверхность в точку  $M(x, y, z)$ , то пройденное ею расстояние от точки  $M_0$  до точки  $M$  численно равно  $|t|$ . Затем реализацию алгоритма расчета необходимо включить часть, отвечающую за определение координат частицы, которые она будет иметь через  $\Delta t$  после начала отсчета времени. Для этого необходимо найти время, в течение которого частица находится в полете. Это удобно сделать, используя значение модуля параметра  $t$ , т.е.  $|t|$ . Так, время,

которое частица находится в полете, рассчитывается по формуле  $\tau_{\text{пол}} = \tau_{\text{пол}} + \frac{|t|}{v}$ , где начальное значение  $\tau_{\text{пол}} = 0$ . Эта процедура выполняется до тех пор, пока  $\tau_{\text{пол}} < \Delta\tau$ . Перед каждым суммированием выполняется проверка. Если  $\tau_{\text{пол}} + \frac{|t|}{v} < \Delta\tau$ , то проводится суммирование и значение  $\tau_{\text{пол}}$  увеличивается, а если  $\tau_{\text{пол}} + \frac{|t|}{v} > \Delta\tau$ , то значение параметра подбирается таким образом, чтобы  $\tau_{\text{пол}} + \frac{|t|}{v} = \Delta\tau$ , и для этого значения параметра  $t$  определяются координаты частицы. При подборе необходимого значения параметра  $t$  нужно учитывать, что знак нового параметра должен быть таким же, как и старого. Подбор нового значения параметра  $t_{\text{пол}}$  выполняется по соотношению  $t_{\text{пол}} = (\Delta\tau - \tau_{\text{пол}})v \frac{t}{|t|}$ . Здесь  $\Delta\tau$  — время, через которое фиксируются координаты частицы;  $\frac{t}{|t|}$  — соотношение, характеризующее знак старого значения параметра  $t$  (данное соотношение может принимать значение +1 или -1).

После определения параметра  $t_{\text{пол}}$  рассчитываются координаты частицы, которые она будет иметь через время  $\Delta\tau$  после начала полета:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_{\text{пол}} l_c; \\ y = y_0 + t_{\text{пол}} m_c; \\ z = z_0 + t_{\text{пол}} n_c. \end{cases}$$

С помощью этих координат можно определить, в какой из частей системы находится частица, и аналогично предыдущей методике следует увеличить счетчик частиц в этой части (зоне):  $N_i = N_i + 1$ . Далее с использованием сохраненного старого значения параметра  $t$  находят истинные координаты, соответствующие поверхности, на которую попала частица:

$$\begin{cases} x = x_0 + t l_c; \\ y = y_0 + t m_c; \\ z = z_0 + t n_c. \end{cases}$$

После этого рассматривается процесс взаимодействия частицы с поверхностью (см. п. 2.3.1), время полета приравняется к нулю:

$\tau_{\text{пол}} = 0$ . Процесс повторяется до тех пор, пока частица не прилипнет к какой-либо поверхности.

По окончании расчета полученные значения  $N_i$  для каждой части используются для определения концентрации,  $1/\text{м}^3$ : 
$$n_i = \frac{Q\Delta\tau}{N_{\text{общ}}V_i} N_i,$$

где  $Q$  — поток частиц, молекул/с;  $\Delta\tau$  — промежуток времени, через который фиксируются координаты частиц, с;  $N_{\text{общ}}$  — общее число пробных частиц (обычно 10 000 или 100 000), шт.;  $V_i$  — объем  $i$ -й части,  $\text{м}^3$ ;  $N_i$  — число частиц в  $i$ -й части, шт.

Поскольку каждая частица может несколько раз зафиксироваться через промежутки времени  $\Delta\tau$ , то фактически получается, что одна частица моделирует себя и несколько других частиц, вылетевших по данной траектории через время  $\Delta\tau$ . Данный подход позволяет моделировать квазипостоянный напуск частиц в систему, уменьшая значение  $\Delta\tau$ , т. е. если в традиционном методе пробной частицы происходит единственный мгновенный напуск, например 10 000 частиц, а затем производится анализ их полета, то при использовании данного подхода происходит установка 10 000 траекторий, по которым через равные промежутки времени  $\Delta\tau$  запускаются 10 000 частиц в систему. Поэтому с уменьшением значения  $\Delta\tau$  уменьшается промежуток между мгновенными запусками и процесс напуска становится квазипостоянным.

### 2.3.8. Пример расчета параметров коаксиального трубопровода

В качестве иллюстрации применения метода Монте-Карло для анализа сложных вакуумных систем рассмотрим следующую задачу. Имеется вакуумная система, состоящая из двух коаксиальных цилиндров (рис. 2.14). Один из этих цилиндров, внешний, — полый. Он имеет температуру, соответствующую тепловой скорости молекул  $v_2$ . Второй цилиндр литой — внутренний. Он имеет температуру, соответствующую скорости молекул  $v_1$ . На рис. 2.14 стрелками показаны направления влета частиц в данную систему и вылета из нее. Для представленной системы найдем коэффициент Клаузинга, распределение давления по длине и диаграмму направления вылетающих частиц.

В данном примере используются процедуры и функции, рассмотренные в описании общего алгоритма, и здесь подробно приводиться не будут.

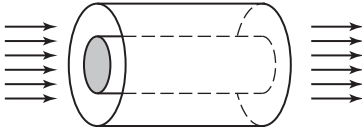


Рис. 2.14. Коаксиальный трубопровод

Прежде всего пронумеруем поверхности. Входное сечение представляет собой плоскость, границами которой являются две окружности с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Входное сечение — это поверхность 1 системы. Внутренний цилиндр — литой, поэтому через

него частицы не летят, он имеет радиус  $r_1$ . Внутренний цилиндр — это поверхность 2. Внешний цилиндр (поверхность 3) имеет радиус  $r_2$ . Последняя в данной системе поверхность 4 — выходное сечение, которое представляет собой плоскость, аналогичную по форме поверхности 1. Длина обоих цилиндров одинакова и равна  $a$ . Для расчета распределения давления необходимо знать скорости частиц, значение входного потока  $Q$  и промежуток времени  $\Delta t$ , через который будет происходить фиксация координат частиц. Примем коэффициент аккомодации равным 1, т.е. при ударе о поверхность частица сразу приобретает скорость, соответствующую температуре этой поверхности. Тогда в нашем случае при ударе о поверхность 2 частица приобретает скорость  $v_1$ , а при ударе о поверхность 3 —  $v_2$ . При влете в структуру частицы имеют скорость  $v_1$ . Значение  $\Delta t$  примем равным

$\frac{6r_2}{v_1 + v_2}$ . В программе для краткости допускаем, что текущая скорость частицы выражается переменной RSpeed, а указанное значение  $\Delta t$  — переменной dt.

Начальным этапом программы, реализующим алгоритм пробной частицы, должен быть этап инициализации переменных, используемых в программе. Здесь для краткости описание этого этапа опущено. Поэтому построение программы начинаем сразу с расчетного модуля.

Первым этапом алгоритма расчетного модуля является этап розыгрыша координаты частицы на входе в систему (см. п. 2.3.1). В нашем случае входное сечение представляет собой не круг, а кольцо, поэтому координаты, попавшие во внутреннюю окружность ( $\text{Sqrt}(x^2 + y^2) < r_1$ ) будут отброшены. Реализация этого этапа показана далее:

```

XSc:=0;
YSc:=0;
ZSc:=0;
RS:=r2;
MainLabel8:
GetStartL(CurrentX,CurrentY,CurrentZ,RS,XSc,YSc,ZSc);

```



```

        if (Sqrt(CurrentX*CurrentX+CurrentY*CurrentY)<r1)
then goto MainLabel8;

```

Здесь CurrentX, CurrentY, CurrentZ — текущие координаты частицы (на данном этапе это координаты частицы во входном сечении системы); XSc, Ysc, ZSc — координаты центра входного сечения; RS — радиус входного сечения (в нашем случае  $RS := r_2$ ).

Задаемся текущими значениями служебных переменных:

```

PossibleTValue:=1e-8;
PossibleTSign:=0;
CurrentSurface:=1;
Rspeed:=v1;
CurrentDistanceS:=0;

```

Здесь PossibleTValue — возможное значение параметра  $t$ ; PossibleTSign — знак возможного значения параметра  $t$ ; CurrentSurface — номер текущей поверхности; Rspeed — текущее значение скорости частицы.

Далее создаем массив значений параметров  $t$  для случаев пересечения с разными поверхностями:

MainLa:

```

    CreateTParameter;

```

Процедура CreateTParameter оперирует с глобальными переменными. Для нашей задачи она показана ниже:

```

procedure CreateTParameter;
var
    SurfaceType: Integer;
    i,j: Integer;
    Alfa, Gamma, D: Extended;
begin
    if ((CurrentSurface=1) or (CurrentSurface=4) then
SurfaceType:=1;
    if ((CurrentSurface=2) or (CurrentSurface=3) then
SurfaceType:=2;
    GetAlfaGamma(Alfa, Gamma, CurrentSurface);
    UpdateDirect(SurfaceType, Alfa, Gamma);
    D:=0;
    TParameter[1]:=GetLinearT(D, CurrentZ, NCos);
    TParameter[2]:=0;
    TParameter[3]:=GetCylinderTM(CurrentX, CurrentY, LCos,

```

```

MCos,r1);
  TParameter[4]:=GetCylinderTP(CurrentX,CurrentY,LCos,
MCos,r1);
  TParameter[5]:=GetCylinderTM(CurrentX,CurrentY,LCos,
MCos,r2);
  TParameter[6]:=GetCylinderTP(CurrentX,CurrentY,LCos,
MCos,r3);
  D:=a; \\ a — длина цилиндра;
  TParameter[7]:=GetLinearT(D,CurrentZ,NCos);
  TParameter[8]:=0;
end;

```

Суть данной процедуры состоит в том, что в зависимости от типа текущей поверхности (SurfaceType: 1 — плоскость, 2 — цилиндр) определяются направляющие косинусы (глобальные переменные LCos, MCos, NCos): вначале находятся углы Alfa и Gamma, характеризующие положение текущей координаты (функция GetAlfaGamma), а потом — направляющие косинусы в зависимости от типа текущей поверхности. Так как у поверхностей, описываемых уравнениями второго порядка (конической, цилиндрической, сферической и др.), есть две точки пересечения с прямой (два значения параметра  $t$ ), вторые значения параметра  $t$  для плоскостей приравняются к нулю.

После того как будет сформирован массив значений параметра  $t$ , необходимо определить то значение, которое соответствует следующей возможной точке соударения частицы с поверхностью системы. Для этого ищется минимальное по модулю значение параметра  $t$ , удовлетворяющее условиям попадания на данную поверхность. Фрагмент программы показан ниже:

```

MainLabel2:
PossibleTIndex:=FindMinimumT(PossibleTValue,PossibleTSign);
\\ поиск минимального по модулю значения t с заданным знаком
  if (PossibleTIndex=0) then
    begin
      ErrorsNumber:=ErrorsNumber+1;
      goto MainLabel1;
    end;
  PossibleSurface:=GetSurfaceNumber(PossibleTIndex);
\\ определение номера возможной поверхности перелета по
\\ номеру элемента в массиве значений t
  PossibleTValue:=TParameter[PossibleTIndex];
  PossibleX:=CurrentX+LCos*PossibleTValue;

```

```

PossibleY:=CurrentY+MCos*PossibleTValue;
\\ определение возможных координат следующей точки соударения
PossibleZ:=CurrentZ+NCos*PossibleTValue;
if (TestCoordinate(PossibleX,PossibleY, PossibleZ,PossibleSurface)=2)
\\ проверка принадлежности данных возможных координат
then \\ соответствующей поверхности
begin
if (GetTClone(CurrentSurface)=PossibleSurface)
then
\\ проверка: не является ли данная поверхность «парной»
begin
PossibleTSign:=-GetSign(PossibleTValue);
\\ и если является, то задается знак поиска в массиве t
goto MainLabel2;
end;

```

Необходимо отметить один важный момент, показанный в данном фрагменте. После проверки на принадлежность возможной точки взаимодействия, соответствующей выбранному значению параметра  $t$ , поверхности производится проверка на «парность» поверхности, с которой частица вылетает, по отношению к поверхности, на которую частица может попасть. Это следует делать в тех случаях, когда необходимо, чтобы частица не смогла пролететь сквозь какую-либо поверхность. Например, поверхность 2 — литой непроницаемый цилиндр, поэтому через него частицы пролететь не могут. Соответственно он является «парной» поверхностью для самого себя. «Парные» поверхности также могут быть противоположными стенками непроницаемой (например, металлической) детали. Ниже показаны функции для определения «парной» поверхности, проверки принадлежности возможной координаты соответствующей поверхности и нахождения номера поверхности по номеру параметра  $t$  в массиве для данной задачи:

```

function GetTClone(var N:LongInt): LongInt;
begin
if (N=2) then GetTClone:=2 else GetTClone:=0;
end;
function TestCoordinate(var X,Y,Z:Extended;
SN:LongInt): Integer;
begin
TestCoordinate:=1;
if ((SN=1) or (SN=4) then

```

```

begin
  if ((Sqrt(X*X+Y*Y)<=r2) and
(Sqrt(X*X+Y*Y)>=r1)) then TestCoordinate:=2;
  end;
  if ((SN=2) or (SN=3) then
  begin
    if ((Z<=a) and (Z>=0)) then TestCoordinate:=2;
    end;
  end;
function GetSurfaceNumber(var P:LongInt): LongInt;
begin
  if ((P mod 2)=1) then GetSurfaceNumber:=(P+1) div
2 else GetSurfaceNumber:=P div 2;
end;

```

## 2.4. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ПРОБНОЙ ЧАСТИЦЫ ДЛЯ РЕЖИМОВ, ДОПУСКАЮЩИХ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

При анализе реальных вакуумных систем важной частью расчетов зачастую является учет отличных от свободномолекулярного режимов течения разреженного газа. Классические методы, система понятий которых основана на использовании осредненных параметров состояния разреженного газа, не дают возможности формировать универсальные математические модели для анализа элементов сложных вакуумных систем. Таким образом, становится очевидной необходимость развития имеющихся статистических методов в направлении возможности анализа газовой среды в режимах, отличных от свободномолекулярного.

Наиболее целесообразным видится развитие метода пробной частицы, поскольку он является достаточно универсальным и при этом позволяет создавать модульные алгоритмы, допускающие любые развитие и расширение.

**Возможная модификация алгоритма метода Монте-Карло пробной частицы для свободномолекулярного режима в целях учета межмолекулярных взаимодействий.** Для учета межмолекулярных взаимодействий при режимах течения, отличных от свободномолекулярных, можно воспользоваться следующим подходом, нашедшим применение в задачах анализа процессов ионной имплантации. В процессе перелета частицы с одной стенки на другую определяется значение параметра  $t_a$ , которое характеризует собой длину свободного пробега частицы в данной системе с заданным режимом течения. Например, пусть характерный линейный размер системы

равен  $L_a$ , а заданный режим течения определяется числом Кнудсена:  $\text{Kn} = 0,1$ . Тогда средняя длина свободного пробега частицы в данном случае определяется как  $\lambda_a = \text{Kn}L_a$ . Для моделирования значения параметра  $t_a$  удобно использовать традиционный для метода Монте-Карло стохастический подход, т.е. находить значение длины свободного пробега случайно, исходя из предпосылки о том, что результирующее среднее значение для всей совокупности частиц должно быть равно  $\lambda_a$ . Например, для равномерного распределения значение параметра  $t_a$  будет формироваться как

$$t_a = 2\lambda_a\xi,$$

где  $\xi$  — случайное число, равномерно распределенное в интервале от 0 до 1;  $\lambda_a$  — средняя длина свободного пробега частицы, определенная из заданных условий течения.

Таким образом, математическое ожидание случайного параметра  $t_a$  лежит по середине данного отрезка и равно  $\lambda_a$ , а само значение параметра  $t_a$  лежит в пределах от 0 до  $2\lambda_a$ .

После того как будет найдено значение  $t_a$ , оно сравнивается со значением параметра  $t$ , который характеризует траекторию текущего перелета, и в случае, если  $t_a < t$ , модуль значения параметра  $t$  меняется на  $t_a$  ( $t = t_a$ ) и соответствующим образом меняется координата точки перелета частицы. Она оказывается как бы «подвисящей» в пространстве и не принадлежащей ни одной из стенок. Фактически это означает, что в процессе перелета частица столкнулась с другой в точке, определяемой новым значением параметра  $t$ .

После столкновения необходимо определить новое направление полета частицы. Это можно сделать, также воспользовавшись случайным характером процесса. Наиболее простым подходом в данном случае является формирование нового направления полета частицы как равновероятного во всех направлениях, т.е. углы  $\psi$  и  $\theta$  должны быть равномерно распределены в пределах от 0 до  $2\pi$  ( $\psi = 2\pi\xi$ ,  $\theta = 2\pi\xi$ ). После этого определяются значения направляющих косинусов аналогично случаю старта с плоскости  $z = c$  и происходит переход к п. 4. Далее все повторяется в обычном режиме с использованием описанных добавлений.

Такой подход позволяет анализировать все сложные вакуумные системы, которые доступны анализу методом Монте-Карло для свободномолекулярного режима течения, при этом расчеты «привязываются» к конкретному значению числа Кнудсена, характеризующему режим течения.

## 2.5. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

При анализе геометрически существенно сложных вакуумных систем часто возникает необходимость уменьшения уровня детализации структуры при минимальном снижении степени достоверности расчета. Такой подход особенно актуален для метода угловых коэффициентов, характеризующегося анализом разветвленных структур как крайне трудоемкой задачей. Метод эквивалентных поверхностей представляет собой универсальную логическую модель и одновременно алгоритм вычислений при анализе молекулярных потоков в многокомпонентных структурах практически неограниченной сложности. Универсальность данного подхода позволяет использовать его совместно с любым известным методом расчета.

В основу метода положена концепция замещения реальных компонентов вакуумной системы некоторыми эквивалентами простейшей формы, имеющими интегральные характеристики, отражающие газокINETические свойства данного компонента. Обычно в качестве эквивалентов используют плоские поверхности, являющиеся фактически граничными сечениями заменяемых элементов. Нужно отметить, что часто используется последовательное замещение с уменьшением уровня детализации. Например, сложный элемент насоса заменяется эквивалентной поверхностью, имеющей газокINETические характеристики данного элемента. После этого анализируются характеристики насоса в подобной упрощенной конфигурации. Далее сам насос может быть заменен эквивалентной поверхностью, если анализируемая вакуумная система геометрически более сложная и т. д. Следовательно, возможно проведение последовательных замещений с уменьшением уровня детализации. Такой подход не влечет существенного снижения достоверности полученных результатов, если речь идет об интегральных характеристиках системы. Если же речь идет о получении полей распределенных дифференциальных характеристик, то применение подобной схемы нежелательно, поскольку обычно эквивалентная поверхность отражает лишь интегральные характеристики замещенного элемента, а ее дифференциальные параметры принимаются так же, как у всех простых поверхностей, составляющих систему.

Процесс замещения легко пояснить на простом примере. Пусть в вакуумной системе присутствует некоторый насос, имеющий сложную внутреннюю геометрию, учет которой при анализе системы в целом нецелесообразен. Обычный путь расчета следующий. Определяются интегральные характеристики данного насоса, в частности

коэффициент захвата. Далее при анализе вакуумной системы насос заменяется на эквивалентную поверхность, представляющую собой входное сечение насоса. При этом коэффициент прилипания этой поверхности равен коэффициенту захвата насоса. Таким образом, внутри вакуумной системы образуется откачивающая поверхность, имеющая аналогичные насосу интегральные характеристики. При этом нужно отметить, что коэффициент прилипания эквивалентной поверхности обычно равномерно распределен по ее площади, в то время как коэффициент захвата насоса может иметь крайне неоднородное распределение по площади входного сечения. Из-за этого использование такого метода замещения для анализа дифференциальных (локальных) характеристик вакуумной системы малопригодно, хотя и возможно.

Кроме того, использование метода эквивалентных поверхностей возможно и в обратном направлении — с увеличением степени детализации. Это бывает необходимо, когда выполняются предварительные расчеты в целях обнаружения наиболее ответственных узлов и агрегатов вакуумной системы. В данном случае все сложные элементы заменяются эквивалентами, после чего намечаются наиболее ответственные части проекта и увеличивается степень их детализации.

## **2.6. МЕТОД БАЛАНСОВЫХ УРАВНЕНИЙ**

В настоящее время для расчета сложных криовакуумных систем используются модели, основывающиеся на применении достаточно сложного математического аппарата (метод Монте-Карло пробной частицы, метод угловых коэффициентов и др.). На начальном этапе проектирования нецелесообразно применять сложные методы расчета, так как это может привести к значительным временным затратам, а результат расчета может показать принципиальную невозможность создания такой системы по каким-либо причинам. Ввиду этого возникает необходимость создания методов, обеспечивающих приемлемую точность расчета и не приводящих к существенным затратам временных ресурсов.

В работе [10] была предложена методика расчета насосов поверхностного действия осесимметричных структур. Большинство разработанных на сегодняшний день насосов имеют именно такую структуру. Таким образом, данный метод позволяет решить достаточно большой класс задач.

Приведем основные допущения и предпосылки, используемые в методике.

1. Существование молекулярного режима течения в структуре ( $Kn \gg 1$ ). При обычных размерах насосов поверхностного действия условия свободномолекулярного режима сохраняются до давления 0,1—0,01 Па.

2. Пространственная плотность распределения частиц в объеме поглощающей структуры однородна в сечениях, ортогональных оси симметрии.

3. Скорости частиц, движущихся в объеме и вылетающих с поверхности, не зависят от их предыстории и имеют диаграмму, соответствующую косинусному распределению (рис. 2.15).

Условия 2 и 3 выполняются только при небольших значениях коэффициента прилипания, так как при значениях коэффициентов прилипания, близких к 1, возможно образование лучевых эффектов за счет фокусировки потока. Это может иметь место при значительных температурных градиентах в поглощающей структуре. Кроме того, исследования, проведенные на кафедре низких температур МЭИ [11], показали, что предположение о косинусном распределении скоростей частиц является достаточно грубым. Например, на выходе из испытательной камеры структура молекулярного потока существенно отличается от косинусного закона распределения (см. рис. 3.28).

В то же время для откачных устройств с нераспыляемыми газопоглотителями активность их геттерной поверхности сравнительно низка, а расчеты методом Монте-Карло показали, что даже большие отклонения от косинусного распределения незначительно сказываются на конечных результатах.

В работе [10] предлагается следующая методика расчета. Одним из основных параметров насоса поверхностного действия является коэффициент захвата, определяющийся отношением числа молекул, поглощенных в насосе, к числу молекул, попавших в насос из какого-то объема  $V$  (рис. 2.16). Таким образом, если  $N(x)$  — число частиц, влетающих в сечение [далее поток  $N(x)$ ], а  $M(x)$  — число частиц,

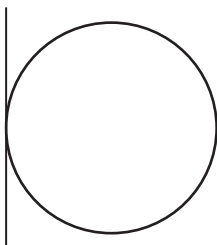


Рис. 2.15. Диаграмма скоростей частиц, соответствующая косинусному распределению (в полярных координатах)

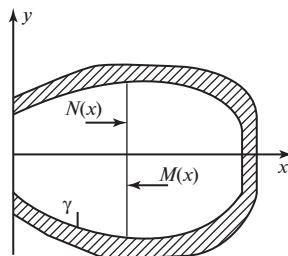


Рис. 2.16. К определению коэффициентов захвата, отражения и пропускания



вылетающих из сечения [далее поток  $M(x)$ ], то коэффициент захвата определяется соотношением

$$\sigma(x) = \frac{N(x) - M(x)}{N(x)},$$

а коэффициент отражения находится следующим образом:

$$\beta(x) = \frac{M(x)}{N(x)}.$$

Коэффициент пропускания  $\alpha$  определяется из баланса  $\alpha + \beta + \sigma = 1$  (в данном параграфе  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  и  $\gamma$  соответственно коэффициенты пропускания, отражения, захвата и прилипания). Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\sigma$  зависят от следующих характеристик поглощающей структуры: вероятности поглощения частицы  $\gamma$ , плотностей вероятности  $P_v^\pm(x)$  взаимодействия частицы с поверхностью, если частица находится в потоке  $M(x)$  или  $N(x)$ , и от вероятностей  $P^\pm(x)$  отражения частицы соответственно в положительном и отрицательном направлении; причем для вероятностей отражения справедливо, что

$$P^+(x) + P^-(x) = 1.$$

Ограничимся вычислением коэффициента захвата на малых отрезках времени и предположим, что за это время коэффициент прилипания практически не меняется, а также что вероятности взаимодействия частиц с поверхностью поглотителя не зависят от значения и знака их скорости.

Рассмотрим уравнения баланса частиц, находящихся в элементарном объеме (рис. 2.17).

В потоке молекул, движущихся в положительном направлении, число частиц, взаимодействующих с поверхностью поглотителя, равно  $N(x)P_v^+(x)\Delta x$ , остальные частицы, число которых составляет  $N(x)(1 - P_v^+(x)\Delta x)$ , не сталкиваются с поверхностью. Из взаимодействующих поглотится  $\gamma N(x)P_v^+(x)\Delta x$  частиц, а  $(1 - \gamma)N(x)P_v^+(x)\Delta x$  молекул отразится от поверхности.

Таким образом, получаем следующие соотношения:

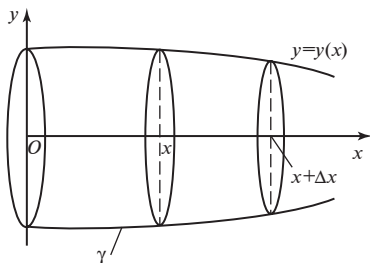


Рис. 2.17. К выводу уравнений баланса частиц, находящихся в объеме вакуумной камеры

$$\begin{aligned}
N(x) &= N(x)P_v^+(x)\Delta x + N(x)(1 - P_v^+(x)\Delta x); \\
N(x)P_v^+(x)\Delta x &= \gamma N(x)P_v^+(x)\Delta x + (1 - \gamma)N(x)P_v^+(x)\Delta x; \\
(1 - \gamma)N(x)P_v^+(x)\Delta x &= (1 - \gamma)N(x)P_v^+(x)\Delta x P^+(x) + \\
&+ (1 - \gamma)N(x)P_v^+(x)\Delta x P^-(x).
\end{aligned}$$

Из приведенных уравнений следует, что  $(1 - \gamma)N(x)P_v^+(x)\Delta x P^-(x)$  частиц переходят из потока  $N(x)$  в поток  $M(x)$ .

Для потока  $M(x)$  получаем аналогичные соотношения:

$$\begin{aligned}
M(x) &= N(x)P_v^-(x)\Delta x + M(x)(1 - P_v^-(x)\Delta x); \\
M(x)P_v^-(x)\Delta x &= \gamma M(x)P_v^-(x)\Delta x + (1 - \gamma)M(x)P_v^-(x)\Delta x; \\
(1 - \gamma)M(x)P_v^-(x)\Delta x &= (1 - \gamma)M(x)P_v^-(x)\Delta x P^+(x) + \\
&+ (1 - \gamma)M(x)P_v^-(x)\Delta x P^-(x).
\end{aligned}$$

При этом  $(1 - \gamma)M(x)P_v^-(x)\Delta x P^+(x)$  частиц переходят из потока  $M(x)$  в поток  $N(x)$ .

Таким образом, система уравнений баланса частиц имеет вид:

$$\begin{cases}
N(x + \Delta x) = N(x) \left[ 1 - \gamma P_v^+(x)\Delta x - (1 - \gamma)P_v^+(x)\Delta x P^-(x) \right] + \\
+ (1 - \gamma)M(x)P_v^-(x)\Delta x P^+(x); \\
M(x + \Delta x) = M(x) \left[ 1 - \gamma P_v^-(x)\Delta x - (1 - \gamma)P_v^-(x)\Delta x P^+(x) \right] + \\
+ (1 - \gamma)N(x)P_v^+(x)\Delta x P^-(x).
\end{cases}$$

Далее осуществляем предельный переход от  $\Delta x$  к  $dx$ . В итоге получаем систему уравнений баланса частиц, летящих в положительном и отрицательном направлениях:

$$\begin{cases}
\frac{dN}{dx} = -(\gamma^+ + \alpha^+)N + \alpha^- M; \\
\frac{dM}{dx} = (\gamma^- + \alpha^-)M - \alpha^+ N;
\end{cases} \quad (2.25)$$

$$\alpha^+ = (1 - \gamma)P_v^+(x)P^-(x); \quad \alpha^- = (1 - \gamma)P_v^-(x)P^+(x);$$

$$\gamma^+ = \gamma P_v^+(x); \quad \gamma^- = \gamma P_v^-(x).$$

Согласно определению  $\frac{d\sigma(x)}{dx} = \left( \frac{N(x) - M(x)}{N(x)} \right)$ , а  $\frac{d\beta(x)}{dx} = \left( \frac{M(x)}{N(x)} \right)$ ,

тогда, сделав соответствующие математические преобразования, можно получить следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{dx} = (1-\gamma)P_v^+ P^+ \sigma^2 + (\gamma(P_v^+ + P_v^-) + \\ + (1-\gamma)(P_v^+ P_v^- - P_v^- P^+))\sigma - \gamma(P_v^+ + P_v^-); \\ \frac{d\beta}{dx} = - (1-\gamma)P_v^+ P^+ \beta^2 + (\gamma(P_v^+ + P_v^-) + \\ + (1-\gamma)(P_v^+ P_v^- + P_v^- P^+))\beta - (1-\gamma)(P_v^+ P_v^-). \end{cases} \quad (2.26)$$

При этом граничными условиями будут следующие соотношения:

$\sigma(x=0) = \sigma$ ;  $\sigma(x=L) = \gamma$  (данное соотношение справедливо, если структура имеет дно при  $x=L$ );

$\beta(x=0) = \beta$ ,  $\beta(x=L) = 1 - \gamma$  (данное соотношение справедливо, если структура имеет дно при  $x=L$ ).

Вероятности взаимодействия и отражения определяются следующим образом. В соответствии с косинусным распределением рассеивание на стенке происходит по вероятностному закону с плотностью вероятности  $P(\alpha) = \frac{1}{2} \cos \alpha$  (рис. 2.18).

Для частицы, столкнувшейся с поверхностью в точке  $x$  и избежавшей поглощения, вероятность  $P^+(x)$  вылета в положительном направлении оси  $x$  (поток  $N(x)$ ) определяется как

$$P^+(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{y'(x)}{2\sqrt{1+(y'(x))^2}}.$$

Вероятность отражения в поток  $M(x)$  вычисляется аналогично:

$$P^-(x) = \frac{1}{2} - \frac{y'(x)}{2\sqrt{1+(y'(x))^2}}.$$

Вывод формул для плотностей вероятности взаимодействия  $P_v^\pm(x)$  молекул с боковой поверхностью поглощающей структуры основан на предположении о независимом характере распределений по скоростям и координатам.

Рассмотрим частицы потока  $N(x)$ . Частицы, находящиеся в объеме (рис. 2.19), либо сталкиваются с боковой поверхностью, либо вылетают через правое сечение. Отношение числа молекул, которые, вылетая из объема в

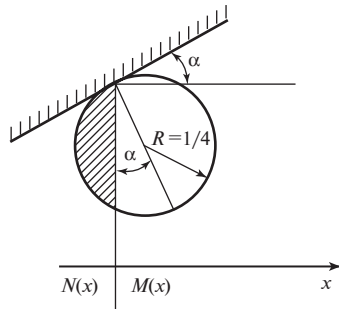


Рис. 2.18. К определению плотности вероятности отражения частицы в потоки  $N(x)$  и  $M(x)$

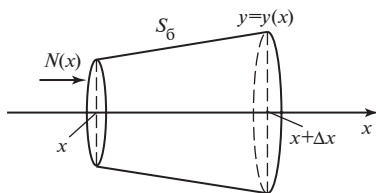


Рис. 2.19. К определению вероятности прохождения частицы вблизи поверхности

поток  $N(x)$ , могут попасть на боковую поверхность структуры, к числу всех молекул, вылетающих из объема в этом потоке, равно отношению площади боковой поверхности  $S_б = 2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}$  к площади полной поверхности  $S_{пол} = S_б + \pi y^2(x)$ :

$$P_в(x)\Delta x = \frac{S_б}{S_{пол}} \approx \frac{2}{y(x)} \sqrt{1+(y'(x))^2} \Delta x,$$

где  $P_в(x)$  — плотность вероятности прохождения частиц вблизи поверхности структуры.

При условии, что скорости частиц в потоке  $N(x)$  распределены по косинусному закону (см. рис. 2.18), для молекул, находящихся вблизи поверхности структуры, плотность вероятности столкновения с поверхностью равна площади заштрихованной фигуры:

$$P_в^+(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha(x)} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} - \frac{y'(x)}{2\sqrt{1+(y'(x))^2}},$$

где  $\alpha(x)$  — угол наклона поглощающей поверхности в точке  $x$ .

Аналогично для  $P_в^-(x)$  в потоке  $M(x)$  можно записать:

$$P_в^-(x) = \frac{1}{2} + \frac{y'(x)}{2\sqrt{1+(y'(x))^2}}.$$

Плотность вероятности  $P_в(x)$  частицы оказаться вблизи поверхности определяется законом пространственного распределения частиц, а плотности вероятностей столкновения  $P_в^{\pm}(x)$  зависят от распределения частиц в пространстве скоростей. Полагая, что эти распределения независимы, получаем выражение для плотности вероятности взаимодействия частицы с поверхностью в потоке  $N(x)$ :

$$P_v^+(x) = \frac{2\sqrt{1+(y'(x))^2}}{y(x)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{y'(x)}{2\sqrt{1+(y'(x))^2}} \right],$$

а для потока  $M(x)$ :

$$P_v^-(x) = \frac{2\sqrt{1+(y'(x))^2}}{y(x)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{y'(x)}{2\sqrt{1+(y'(x))^2}} \right].$$

Уравнения (2.26) допускают точное решение для областей с кусочно-линейной границей. В качестве примера использования (2.26) выведем аналитическую зависимость коэффициента захвата от коэффициента прилипания и геометрических характеристик для конической области ( $y(x) = kx + y_0$ ,  $0 \leq x \leq x_0$ ). С использованием соотношений для плотностей вероятности будем иметь:

$$P^+(x) = \frac{1}{2} + \frac{k}{2\sqrt{1+k^2}} = k_+ = \text{const};$$

$$P^-(x) = \frac{1}{2} - \frac{k}{2\sqrt{1+k^2}} = \text{const};$$

$$P_v^+(x) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{y(x)} k_- = \text{const} = \frac{C_0}{y(x)} k_-;$$

$$P_v^-(x) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{y(x)} k_+ = \text{const} = \frac{C_0}{y(x)} k_+.$$

Подставив полученные соотношения в (2.26), получим

$$\sigma = f(x)(\sigma^2 + a\sigma - b) = f(x)(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2),$$

$$\text{где } \sigma_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}; \quad f(x) = \frac{(1-\gamma)k_+^2 C_0}{y(x)}; \quad a = \frac{\gamma + (1-\gamma)(k_-^2 - k_+^2)}{(1-\gamma)k_+^2};$$

$$b = \gamma / (1-\gamma) k_+^2.$$

Далее разделим переменные:

$$\frac{d\sigma}{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)} = \left[ \frac{1}{\sigma - \sigma_1} - \frac{1}{\sigma - \sigma_2} \right] \frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} d \left[ \ln \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma - \sigma_2} \right] = f(x) dx.$$

Принтегрировав последнее уравнение, получим

$$\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma - \sigma_2} = C e^{(\sigma_1 - \sigma_2) \int f(x) dx}.$$

Константу  $C$  можно найти из условия  $\sigma(x_0) = \gamma$ . Проведя математические преобразования для цилиндрической поверхности:  $y(x) = y_0$ ,  $0 \leq x \leq x_0$ , получим

$$\sigma = \frac{\frac{2\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} \left( \gamma + \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} \right) + \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} \left( \gamma - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} \right) e^{-\frac{4\sqrt{\gamma}}{D} L}}{\left( \gamma + \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} \right) - \left( \gamma - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} \right) e^{-\frac{4\sqrt{\gamma}}{D} L}},$$

где  $D$  — диаметр цилиндра.

С помощью системы (2.26) в [10] были выведены соотношения для различных видов поверхностей, которые будут приведены ниже. Также будут представлены соотношения, полученные в настоящей работе. Используя данные соотношения и применив описанный ниже алгоритм, инженер-проектировщик может получить характеристики большинства осесимметричных вакуумных систем.

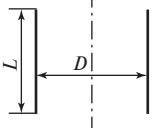
### 2.6.1. Аналитические соотношения

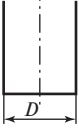
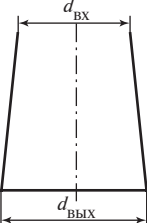
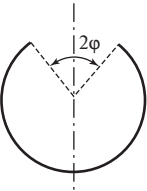
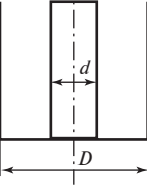
В табл. 2.3 приведены соотношения для расчета коэффициентов захвата различных вакуумных структур. Коэффициенты отражения и пропускания либо даются в явном виде, либо находятся по балансовым соотношениям. Необходимо учесть, что коэффициент пропускания «глухой» структуры (с дном) равен нулю.

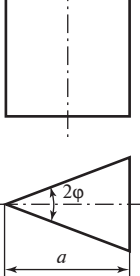
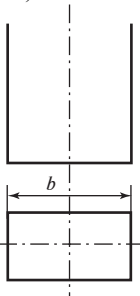
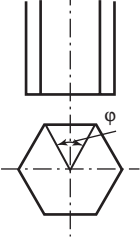
Соотношения были получены путем изменения граничных условий, а также суммированием коэффициентов захвата и отражения двух граничных структур с соответствующими весовыми коэффициентами, найденными из отношения площадей. Например, коэффициент захвата цилиндрической структуры с диафрагмами на входе и выходе может быть определен суммированием коэффициентов захвата, с весовыми коэффициентами сквозной и «глухой» цилиндрических структур с диафрагмами на входе. Условные обозначения вышеупомянутых коэффициентов будут следующие:  $\sigma_1$  — коэффициент захвата структуры 1;  $\beta_3$  — коэффициент отражения структуры 3 и т.д.

Таблица 2.3

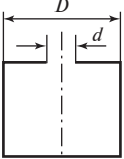
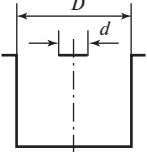
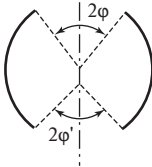
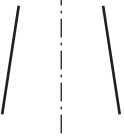
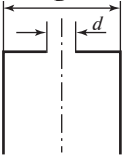
Аналитические соотношения для расчета коэффициентов захвата и отражения различных вакуумных структур

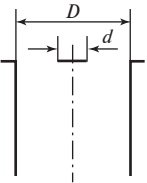
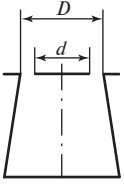
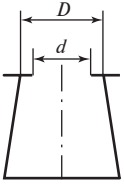
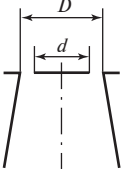
Структура	Формула
1. Сквозной цилиндр 	$\sigma = 2 \frac{\sqrt{\gamma} \left( e^{\frac{2\sqrt{\gamma}}{D} L} - 1 \right)^2 + \gamma \left( e^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{D} L} - 1 \right)}{(1 + \sqrt{\gamma})^2 e^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{D} L} - (1 - \sqrt{\gamma})^2};$ $\beta = 2 \frac{(1 - \gamma) \left( e^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{D} L} - 1 \right)}{(1 + \sqrt{\gamma})^2 e^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{D} L} - (1 - \sqrt{\gamma})^2}$

Структура	Формула
2. Цилиндр с дном 	$\sigma = \frac{\frac{2\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} \left( \gamma + \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} \right) + \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} \left( \gamma - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} \right) e^{-\frac{4\sqrt{\gamma}L}{D}}}{\left( \gamma + \frac{2\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} \right) - \left( \gamma - \frac{2\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}} \right) e^{-\frac{4\sqrt{\gamma}L}{D}}};$ $\beta = 1 - \sigma$
3. Конус с дном 	$\sigma = \frac{\sigma_1(\gamma - \sigma_2) - \sigma_2(\gamma - \sigma_1) \exp\{(\sigma_1 - \sigma_2)(F(x) - F(x_0))\}}{(\gamma - \sigma_2) - (\gamma - \sigma_1) \exp\{(\sigma_1 - \sigma_2)(F(x) - F(x_0))\}};$ <p>здесь <math>F(x) - F(x_0) = \frac{(1-\gamma)k_+^2 \cdot 2\sqrt{k+1}}{k} \ln \left[ \frac{d_{\text{ВХ}}/2}{kL + d_{\text{ВХ}}/2} \right];</math></p> $\sigma_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}; \quad a = \frac{\gamma + (1-\gamma)(k_-^2 - k_+^2)}{(1-\gamma)k_+^2};$ $b = \gamma / \left[ (1-\gamma)k_+^2 \right]; \quad k = (d_{\text{ВЫХ}} - d_{\text{ВХ}})/(2L);$ $k_+ = P^+(x); \quad k_- = P^-(x)$
4. Сфера с углом раскрытия $2\varphi$ 	$\sigma = \frac{2\gamma}{(1+\gamma) - (1-\gamma)\cos\varphi};$ $\beta = \frac{1-\gamma}{1+\gamma \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$
5. Коаксиальные цилиндры с дном 	$\sigma = \frac{2\sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{1-\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{1+\sqrt{\gamma}} C \exp \left\{ \frac{4\sqrt{\gamma}L}{D-d} \right\} \right)}{C \exp \left\{ \frac{4\sqrt{\gamma}L}{D-d} \right\} - 1},$ <p>где <math>C = \frac{(\sqrt{\gamma} - \gamma + 2)(1 + \sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\gamma} + \gamma - 2)(1 - \sqrt{\gamma})}</math></p>

Структура	Формула
<p>6. Поверхность с поперечным сечением в виде равнобедренного треугольника (с дном)</p> 	$\sigma = \frac{2\sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{1-\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{1+\sqrt{\gamma}} C \exp \left\{ \frac{2\sqrt{\gamma}L}{a} \left[ 1 + \frac{1}{\sin \varphi} \right] \right\} \right)}{C \exp \left\{ \frac{2\sqrt{\gamma}L}{a} \left[ 1 + \frac{1}{\sin \varphi} \right] \right\} - 1}.$ <p>Здесь и далее <math>C</math> определяется по формуле, предложенной для структуры 5</p>
<p>7. Поверхность с поперечным сечением в виде четырехугольника (с дном)</p> 	$\sigma = \frac{2\sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{1-\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{1+\sqrt{\gamma}} C \exp \left\{ 4\sqrt{\gamma}L \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] \right\} \right)}{C \exp \left\{ 4\sqrt{\gamma}L \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] \right\} - 1}$
<p>8. Поверхность с поперечным сечением в виде правильного многоугольника (с дном)</p> 	$\sigma = \frac{2\sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{1-\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{1+\sqrt{\gamma}} C \exp \left\{ \frac{2\sqrt{\gamma}L}{R \cos(\varphi/2)} \right\} \right)}{C \exp \left\{ \frac{2\sqrt{\gamma}L}{R \cos(\varphi/2)} \right\} - 1},$ <p>где <math>R</math> — радиус описанной окружности</p>



Структура	Формула
<p>9. Глухой цилиндр с диафрагмой на входе</p> 	$\sigma = \frac{\sigma_2 + \beta_2 \gamma \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}{1 - \beta_2(1 - \gamma) \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}$
<p>10. Глухой цилиндр с отражателем на входе</p> 	$\sigma = \frac{\sigma_2 + \beta_2 \gamma \frac{d^2}{D^2}}{1 - \beta_2(1 - \gamma) \frac{d^2}{D^2}}$
<p>11. Сквозная сфера</p> 	$\sigma = \frac{1 - 2A}{1 - A} \frac{\gamma}{1 - (1 - \gamma)(1 - 2A)};$ $\beta = \frac{1 - 2A}{1 - A} \frac{A(1 - \gamma)}{(1 - (1 - \gamma)(1 - 2A))},$ <p>где <math>A = \frac{1 - \cos \varphi}{2}</math>; <math>\varphi = \varphi'</math></p>
<p>12. Сквозной конус</p> 	<p><math>\sigma = \sigma_1</math> (см. формулы для структуры 3);</p> $\beta = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f^2}}{2f},$ <p>где <math>c = \frac{\gamma}{1 - \gamma} + \frac{2k^2 + 1}{8(k^2 + 1)}</math>; <math>f = -\frac{k_-^2}{2}</math>; <math>k</math> и <math>k_-^2</math> определяются так же, как для структуры 3</p>
<p>13. Сквозной цилиндр с диафрагмой на входе</p> 	$\sigma = \frac{\sigma_1 + \beta_1 \gamma \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}{1 - \beta_1(1 - \gamma) \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}; \quad \beta = \frac{\beta_1 \frac{d^2}{D^2}}{1 - \beta_1(1 - \gamma) \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}$

Структура	Формула
<p>14. Сквозной цилиндр с отражателем на входе</p> 	$\sigma = \frac{\sigma_1 + \beta_1 \gamma \frac{d^2}{D^2}}{1 - \beta_1(1 - \gamma) \frac{d^2}{D^2}}; \quad \beta = \frac{\beta_1 \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}{1 - \beta_1(1 - \gamma) \frac{d^2}{D^2}}$
<p>15. Глухой конус с отражателем на входе</p> 	$\sigma = \frac{\sigma_3 + \beta_3 \gamma \frac{d^2}{D^2}}{1 - \beta_3(1 - \gamma) \frac{d^2}{D^2}}$
<p>16. Глухой конус с диафрагмой на входе</p> 	$\sigma = \frac{\sigma_3 + \beta_3 \gamma \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}{1 - \beta_3(1 - \gamma) \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}$
<p>17. Сквозной конус с отражателем на входе</p> 	$\sigma = \frac{\sigma_{12} + \beta_{12} \gamma \frac{d^2}{D^2}}{1 - \beta_{12}(1 - \gamma) \frac{d^2}{D^2}}; \quad \beta = \frac{\beta_{12} \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}{1 - \beta_{12}(1 - \gamma) \frac{d^2}{D^2}}$

На рис. 2.20—2.23 представлены результаты расчета по вышеприведенным соотношениям для некоторых структур.

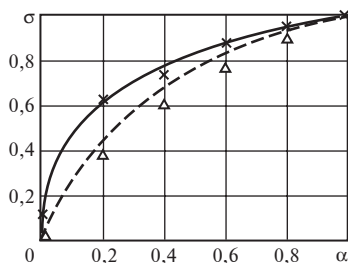


Рис. 2.20. Зависимости коэффициента захвата структуры, состоящей из цилиндра и конуса, от коэффициента  $\alpha$ :

—  $D_1:L_1 = 0,05:0,2$  м;  $D_1:d_2:L_2 = 0,05:0:0,02$  м;  
 × — то же при расчете по методу Монте-Карло;  
 ---  $D_1:L_1 = 0,2:0,1$  м;  $D_1:d_2:L_2 = 0,2:0:0,1$  м;  
 Δ — то же при расчете по методу Монте-Карло

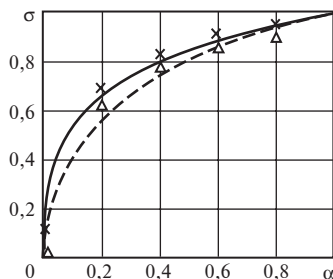


Рис. 2.21. Зависимости коэффициента захвата глухого конуса от коэффициента  $\alpha$ :

—  $d_{\text{вх}}:d_{\text{вых}}:L = 0,1:0,15:0,5$  м;  
 × — то же при расчете по методу Монте-Карло;  
 ---  $d_{\text{вх}}:d_{\text{вых}}:L = 0,1:0,05:0,3$  м;  
 Δ — то же при расчете по методу Монте-Карло

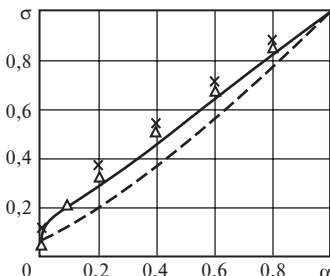


Рис. 2.22. Зависимости коэффициента захвата конуса с диафрагмой на входе и выходе от коэффициента  $\alpha$ :

—  $d_{\text{вх}}:d_{\text{вых}}:d_{\text{вх1}}:d_{\text{вых1}}:L = 0,1:0,15:0,05:0,07:0,5$  м;  
 × — то же при расчете по методу Монте-Карло;  
 ---  $d_{\text{вх}}:d_{\text{вых}}:d_{\text{вх1}}:d_{\text{вых1}}:L = 0,1:0,05:0,05:0,02:0,5$  м;  
 Δ — то же при расчете по методу Монте-Карло

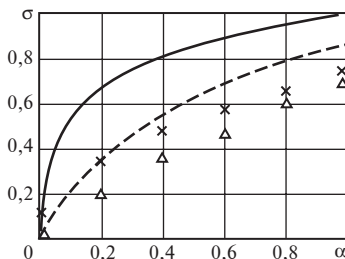


Рис. 2.23. Зависимости коэффициента захвата коаксиальных цилиндров с отражателем на входе и диафрагмой на выходе от коэффициента  $\alpha$ :

—  $D:d:d_1:d_2:L = 0,2:0,1:0,14:0,15:0,7$  м;  
 × — то же при расчете по методу Монте-Карло;  
 ---  $D:d:d_1:d_2:L = 0,2:0,1:0,14:0,15:0,1$  м;  
 Δ — то же при расчете по методу Монте-Карло

Из рисунков видно, что погрешность расчетов по данным соотношениям по сравнению с расчетами по методу Монте-Карло увеличивается по мере усложнения структуры. Это объясняется тем, что соотношения для более сложных структур, например для коаксиальных цилиндров, изначально выводились с погрешностью (считался коэффициент захвата для цилиндра с эквивалентным диаметром, равным разности диаметров структуры, состоящей из коаксиальных цилиндров, и т.п.). Кроме того, сказывается зависимость от геометрических размеров структуры.

Для сопряженных поверхностей с различными коэффициентами захвата применяются следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \alpha_1 \frac{\beta_2 \sigma_1 + \sigma_2}{1 - \beta_1 \beta_2}; \\ \beta &= \beta_1 + \frac{\alpha_1^2 \beta_2}{1 - \beta_1 \beta_2}; \\ \alpha &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Формулы (2.27) были рассмотрены в [10]. Проверка их пригодности осуществляется следующим образом. Сначала определяется коэффициент захвата какой-либо структуры, затем она разбивается на несколько частей и рассчитывается коэффициент захвата получившейся структуры, при этом используются формулы (2.27). Результаты такого расчета для цилиндрической структуры с дном приведены на рис. 2.28. Как видно из рисунка, данные достаточно хорошо совпадают.

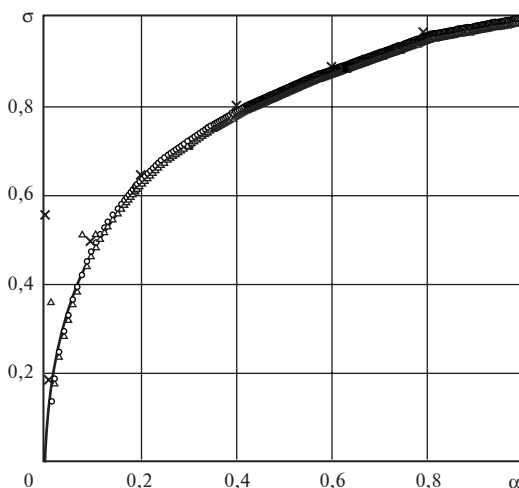


Рис. 2.24. Зависимости коэффициента захвата глухого цилиндра от коэффициента  $\alpha$  при разбиении этой структуры на пять частей ( $\circ$ ) и без разбиения (—) ( $L = 1$  м,  $D = 0,1$  м)

На этом же рисунке приведены результаты расчета по методу Монте-Карло.

### 2.6.2. Расчет коэффициента захвата крионасоса Marathon-8 с помощью предложенного алгоритма

Представим универсальный алгоритм, по которому рассчитывается коэффициент захвата поглощающей структуры. Далее опишем этот алгоритм применительно к насосу Marathon-8 (рис. 2.25).

1. Сначала требуется разбить структуру на составные части, которые соответствуют вышеприведенным структурам.

2. После этого необходимо определить геометрические характеристики каждого из элементов системы, а также их коэффициенты прилипания.

Рассмотрим один из возможных вариантов моделирования сложной структуры с помощью стандартных поверхностей.

Структуру, представленную на рис. 2.25, целесообразно разбить так, как показано на рис. 2.26, из которого видно, что конические сорбирующие поверхности заменены плоскостями. Расстояние между плоскостями выбирается по среднему между местом крепления соответствующего конуса к цилиндру (см. рис. 2.25) и нижней его точкой. Отличия площадей конусов от плоскостей учитываются следующим образом: для всей поверхности крионасоса вычисляется средний коэффициент прилипания, равный сумме коэффициентов прилипания всех поверхностей крионасоса (в том числе и кожуха), причем каждое слагаемое умножается на соответствующий весовой коэффициент, определяемый из отношения площади данной поверхности к площади всей структуры.

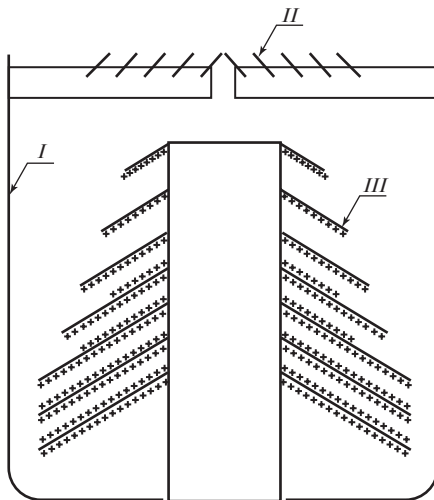
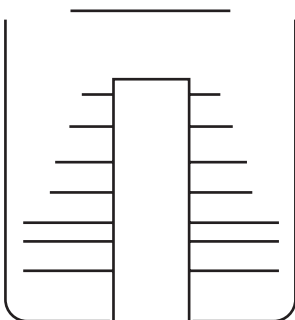
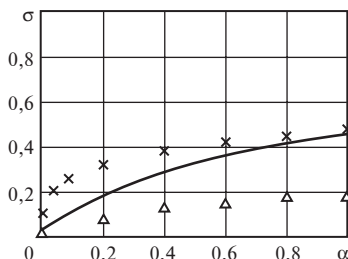


Рис. 2.25. Схема крионасоса Marathon-8:

*I* — цилиндрический кожух; *II* — жалюзийный экран;  
*III* — «елочка»; + — сорбент



**Рис. 2.26. Упрощенная конструкция крионасоса**



**Рис. 2.27. Зависимости коэффициента захвата крионасоса Marathon-8 от коэффициента  $\alpha$ :**  
 — — расчеты по аналитическому методу, x, Δ — расчеты по методу Монте-Карло для структур, представленных на рис. 2.26 и 2.27

Задаем число поверхностей равным восьми. В соответствии с табл. 2.3 это будут следующие поверхности: 24, 35, 35, 35, 35, 35, 35 и 31. Этот процесс — важный этап, так как очевидно, что чем лучше поверхность приближена к реальной, тем точнее будут результаты расчета. На рис. 2.27 представлены результаты расчета крионасоса. Как видно из рисунка, расхождения могут быть довольно большими. Однако характер зависимости сохраняется. Возможных причин расхождения может быть несколько.

Первая заключается в достаточно грубой замене поверхностей насоса, которые являются конусами, на плоскости.

Вторая состоит в том, что коэффициент прилипания осреднялся по поверхности насоса, т.е. принималось, что он постоянен во всех сечениях насоса.

Третьей является то, что соотношения для коаксиальных цилиндров были получены путем замены диаметров в формулах для цилиндрических структур эквивалентными.

Кроме того, при предложенном разбиении ширина поверхностей оказалась больше их длины, а это, несомненно, вносит определенную погрешность в конечный результат.

Все эти факторы отрицательно сказываются на результатах расчета. Для примера на рис. 2.27 представлены результаты расчетов по методу Монте-Карло структуры, приведенной на рис. 2.26. Из рисунка видно, что кривая коэффициента захвата, построенная в соответствии с аналитическими соотношениями, лежит между значениями, полученными по методу пробной частицы Монте-Карло для структур, изображенных на рис. 2.25 и 2.26.

Таким образом, используя предложенный алгоритм, можно рассчитать коэффициенты захвата для осесимметричных вакуумных структур.

Погрешностями при предварительных расчетах достаточно сложных структур можно пренебречь. Соотношения можно использовать и в некоторых других случаях, например при получении сравнительных характеристик различных систем, это объясняется тем, что, несмотря на погрешности, характер зависимости сохраняется (см. рис. 2.20—2.23). Ограничения на использование данных соотношений для более точных расчетов накладывают принятые допущения, а также погрешности получения самих соотношений.

## Глава 3

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ

### 3.1. РЕАЛЬНЫЕ ВАКУУМНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Обычно любую вакуумную систему можно условно разделить на несколько частей:

1) откачиваемый рабочий объем или система устройств, в которых необходимо создавать и поддерживать низкое давление;

2) трубопроводы, клапаны и затворы, а также другая вакуумная арматура, необходимая для соединения откачиваемого объема с системой откачки;

3) система откачки, представляющая собой один вакуумный насос или их группу, главная задача которых — создавать разрежение через систему соединительной арматуры в рабочем объеме.

Таким образом, реальная вакуумная система даже в самом простом случае является достаточно сложной разветвленной структурой, подверженной влиянию многих факторов, складывающихся в процессе работы ее составных элементов. Как правило, при анализе вакуумных систем расчеты проводятся для отдельных элементов, таких как трубопроводы, насосы и др. Однако если необходимо получить наиболее полную и точную информацию о характеристиках вакуумной системы, то нужно проводить ее анализ в целом как единой сложной структуры. Это позволяет максимально учитывать все факторы, влияющие на ее функционирование, а также взаимное влияние этих факторов.

Таковыми факторами, вносимыми элементами, относящимися к откачиваемому объему, служат прежде всего условия и характер газонатекания внутрь откачиваемого объема, связанные как непосредственно с обеспечиваемым технологическим процессом (газовыделение образца, технологические потоки), так и с обратным потоком из системы трубопроводов к системе откачки. Как правило, газонатекание



носит распределенный и множественный характер, т.е. источники потоков могут быть распределены и иметь разную интенсивность. Кроме того, уже сам откачиваемый объем может иметь сложную геометрическую структуру, что также влияет на распределения концентрации и молекулярных потоков. Таким образом, неоднородный характер газовыделения внутри откачиваемого объема вкупе со сложной конфигурацией, на которую может оказывать определенное влияние даже позиция образца или других вспомогательных устройств, формируют внутри откачиваемого объема условия, далекие от идеальных, которые обычно принимаются при рассмотрении отдельных элементов вакуумной системы. Кроме того, существенное влияние на протяжении системы в целом, в том числе и в откачиваемом объеме, оказывают различные температурные неоднородности, особенно характерные для криовакуумной техники. При этом появляется необходимость расчета и учета тепловых потоков и их влияния на эффективность работы вакуумной системы.

При движении газовый поток испытывает деформации, связанные с влиянием системы вакуумной арматуры — трубопроводов, затворов, клапанов. Все эти устройства могут вносить существенные изменения в характер течения, что также нужно учитывать при детальном расчете. Кроме того, достаточно часто именно в системе вакуумной арматуры газ переходит из одного режима течения в другой. Например, в одной точке вакуумной системы обеспечивается давление, характерное для молекулярного режима течения, а в другой — давление соответствует уже переходному или даже вязкостному течению.

Оборудование вакуумной откачки является последним звеном в любой вакуумной системе, и от качества его работы зависит эффективность всей структуры. Как правило, система откачки состоит из группы насосов, которые могут работать как одновременно, создавая многоступенчатую структуру, так и по очереди, обеспечивая непрерывную откачку. Очевидно, что в реальности регламент эксплуатации системы откачки предполагает изменение эффективности ее функционирования в процессе работы, что вносит еще один существенный фактор — нестационарность протекающих в вакуумной системе процессов, влияние которой необходимо учитывать. Кроме системы откачки определенную лепту вносят и условия газонатекания в откачиваемом объеме, которые могут изменяться в процессе работы, а также возможные паразитные источники газа — газовыделение со стенок вакуумной арматуры, натекание через неплотности в соединениях и т.п.

Классифицировать вакуумные системы удобно в зависимости от параметров, которые необходимо обеспечить в процессе работы. Например, в зависимости от степени достигаемого вакуума выделяют системы, обеспечивающие сверхвысокий, высокий, средний и низкий вакуум (*форвакуумные системы*). Если необходимо обеспечивать работу при низких температурах, используют *криовакуумные системы*. Различное криовакуумное оборудование получило широкое распространение в термоядерной энергетике, микроэлектронике, ускорительно-накопительных установках и в ряде других областей. Зачастую эти системы используют в приложениях с высокой степенью «ответственности», поскольку они позволяют избавиться от движущихся (а значит, наиболее уязвимых) узлов в рабочей зоне.

Кроме того, часто основным признаком принадлежности вакуумной системы к тому или иному классу является применяемое в ней оборудование откачки. Так, например, если в вакуумной системе используются насосы без масляной смазки, то такую систему обычно называют *безмасляной*. Кроме типа устройств откачки для характеристики вакуумной системы важную роль играет их производительность: степень достигаемого вакуума, быстрота откачки и продолжительность поддержания рабочих режимов. В этой связи вакуумные системы разделяют на большие и малые. *Большие вакуумные системы* находят применение в установках термоядерной энергетике, системах имитации космического пространства. *Малые вакуумные системы* обычно используются в микроэлектронике, химии, медицине и других областях, где не требуется столь внушительная, как в больших системах, производительность.

## **3.2. ПРОВОДИМОСТЬ СЛОЖНОГО ТРУБОПРОВОДА В СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ**

### **3.2.1. Основные понятия**

Данный параграф посвящен обзору известных способов расчета (кроме метода пробной частицы и угловых коэффициентов) сложных трубопроводов при свободномолекулярном режиме течения газа.

Проводимость  $U$  характеризуется вероятностью прохождения (коэффициентом Клаузинга)  $k_{\text{Кл}}$ . Примем, что  $k_{\text{Кл}} = k_{12}$ , где  $k_{12}$  — вероятность того, что частицы, падающие с распределением Максвелла на входную поверхность площадью  $F_1$  конструктивного элемента, проходят выходную поверхность площадью  $F_2$ . Доля сталкивающихся

частиц  $1 - k_{12}$  вылетает из конструктивного вакуумного элемента через сечение площадью  $F_1$ . Поток частиц в направлении поверхности 2 равен  $F_1 I_1 k_{12}$ , а в противоположном направлении —  $F_2 I_2 k_{21}$  ( $I$  — плотность потока частиц) в случае, когда на поверхности  $F_2$  также справедливо распределение Максвелла. Суммарный поток  $N = F_1 I_1 k_{12} - F_2 I_2 k_{21}$  равен нулю, если  $I_1 = I_2$ . Значит,

$$F_1 k_{12} = F_2 k_{21}, \quad (3.1)$$

$$U = \frac{F_1 k_{12} v}{4} = \frac{F_2 k_{21} v}{4}. \quad (3.2)$$

Используя представления о направленности движения молекул параллельно оси трубопровода и структуре разреженного газа, М. Кнудсен установил и подтвердил экспериментально выражение для расчета газового потока при течении через длинный трубопровод и отверстие в бесконечно тонкой стенке при молекулярном режиме. Он принял, что стенка трубопровода поглощает и отражает молекулы в соответствии с законом косинуса. П. Клаузингом был предложен аналитический метод для нахождения  $k_{кл}$  путем численного интегрирования уравнения второго рода Фредгольма. Он ввел понятие вероятности прохождения молекулы и разработал методы расчета проводимостей коротких и коаксиальных трубопроводов. Анализ предложенного соотношения показывает, что распределение  $k_{кл}(x)$  вдоль трубы зависит только от одного параметра — отношения длины трубы к диаметру. По уравнению П. Клаузинга были рассчитаны трубопроводы с различной конфигурацией проходного сечения, и результаты представлены в [1] в виде таблиц. В нижеприведенных расчетах использовались коэффициенты  $k_{кл}$ , которые были получены Клаузингом в 1932 г. (см. [1]).

Для анализа высоковакуумных систем применяются методы угловых коэффициентов и результаты статистических испытаний (метод Монте-Карло) (см. гл. 1 и 2)

Для расчетов коротких трубопроводов ( $L < 20D$ ) используется формула, предложенная П. Клаузингом:

$$U = 0,25 k_{кл} F v = 36,4 k_{кл} F \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (3.3)$$

### 3.2.2. Методы расчета общей проводимости сложного трубопровода

Далее рассмотрим расчет проводимости сложного трубопровода, состоящего из отдельных конструктивных элементов. Для сравнения результатов определим суммарную проводимость  $U$  четырьмя методами.

#### 1. Аналогия с электрическими цепями (подход С. Дэшмана).

Если вакуумная система состоит из  $n$  последовательно соединенных элементов с известными проводимостями  $U_i$ , то суммарную проводимость системы можно определить по выражению

$$\frac{1}{U} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{U_i}. \quad (3.4)$$

При параллельном соединении  $n$  вакуумных элементов общая проводимость рассчитывается по формуле

$$U = \sum_{i=1}^n U_i. \quad (3.5)$$

**2. Метод Монте-Карло.** При молекулярном режиме течения молекулы газа можно считать невзаимодействующими и проводимость можно оценить как отношение числа вылетевших молекул к числу молекул, влетевших с противоположного конца трубопровода. Данный метод позволяет определить вероятность прохождения молекулами трубопровода определенной конфигурации (вместо решения системы уравнений, описывающих течение газа). Полученная вероятность  $k_{\text{Кл}}$  подставляется в (3.3), и находится численное значение проводимости сложного трубопровода. Подробное описание метода Монте-Карло приводится в гл. 1.

**3. Теорема аддитивности обратной проводимости последовательно соединенных конструктивных элементов с известным значением  $U_i$  для каждого из них.** Вероятность прохождения (коэффициент Клаузинга) трубопровода, который имеет участки с увеличивающимися и уменьшающимися поперечными сечениями, рассчитывается по следующей формуле:

$$\frac{1}{F_1 k_{1n}} = \frac{1}{F_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{F_i} \left( \frac{1}{k_i} - 1 \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{F_i} \left( \frac{F_i}{F_{i+1}} - 1 \right) \delta_{i,i+1}, \quad (3.6)$$

где  $\delta_{i,i+1} = \begin{cases} 1 & \text{для } F_{i+1} < F_i \quad (\text{сужающееся сечение}); \\ 0 & \text{для } F_{i+1} \geq F_i \quad (\text{несужающееся сечение}). \end{cases}$

Второе слагаемое в правой части (3.6) описывает влияние на  $k_{1n}$  параметров  $F_i$  и  $k_i$ , а третье — влияние сужения поперечного сечения при переходе от одного участка к другому.

Общая проводимость

$$U = \frac{F_1 k_{1n} v}{4} = \frac{F_n k_{n1} v}{4}. \quad (3.7)$$

Проводимость элемента конструкции

$$U_i = \frac{F_i k_i v}{4}. \quad (3.8)$$

Модифицированная проводимость

$$U_{ai} = \frac{F_{i+1} v / 4}{1 - F_{i+1} / F_i}. \quad (3.9)$$

Учитывая соотношение (3.6), выводим теорему аддитивности обратной проводимости:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{F_i v / 4} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{U_i} - \frac{1}{F_i v / 4} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_{i,i+1}}{U_{ai}}. \quad (3.10)$$

Затем вводим модифицированные проводимости:

$$U_{mi} = \frac{F_i k_i v / 4}{1 - k_i} = \frac{U_i}{1 - U_i (F_i v / 4)}; \quad (3.11)$$

$$U_m = \frac{F_1 k_{1n} v / 4}{1 - k_{1n}} = \frac{F_n k_{n1} v / 4}{1 - k_{n1} F_n F_1} = \frac{U}{1 - U (F_1 v / 4)}. \quad (3.12)$$

Теорема аддитивности в этом случае принимает вид

$$U_m^{-1} = \sum_{i=1}^n U_{mi}^{-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{i,i+1} U_{ai}^{-1}. \quad (3.13)$$

Модифицированная проводимость  $U_m$  учитывает направление течения газа, а проводимость  $U$  не учитывает его, причем  $U_m$  в направлении поверхности  $n$  и в противоположном направлении не равны.

**4. Метод разбиения на «элементарные» каналы.** Под «элементарным» понимается канал с известным коэффициентом Клаузинга. Трубопровод сложной геометрической формы разбивается на «элементарные» каналы и промежуточные камеры, осевая протяженность которых стремится к нулю ( $\delta \rightarrow 0$ ). Условные камеры А, В и С (рис. 3.1) необходимы для обеспечения равновесия газа на входе каждого канала. Разбиение трубопровода осуществляется таким образом, чтобы геометрически выход предыдущего канала соответствовал входу последующего, расчет проводимости канала осуществляется по формуле

$$U = k_0 U_0, \quad (3.14)$$

где  $U_0 = 36,4F \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  — проводимость входного сечения канала.

Складывая проводимости каналов при их последовательном соединении, получаем формулу для определения проводимости сложного трубопровода:

$$U' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n W_i} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i U_{0i}} \right)^{-1}. \quad (3.15)$$

Так как в реальном трубопроводе молекулярный поток деформирует пространственное распределение плотности молекул на входе в канал (кроме первого), то сопротивление каждого канала равно разности полного сопротивления и сопротивления входного сечения:

$$W_i = W'_i - W_{0i} = \frac{1}{U_{0i}} \frac{1 - k_i}{k_i}, \quad i \geq 2. \quad (3.16)$$

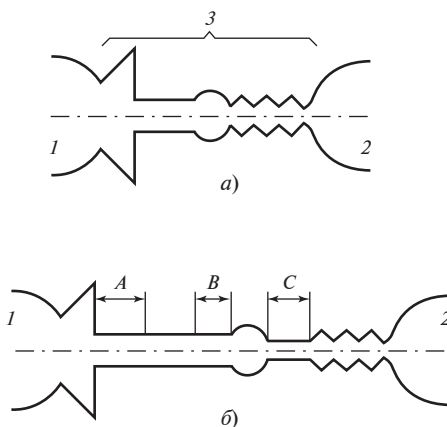
Полная проводимость трубопровода

$$U = \frac{1}{W} = \left[ \frac{1}{U_{01} k_1} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{U_{0i}} \frac{1 - k_i}{k_i} \right]^{-1}. \quad (3.17)$$

В частности, для трубопроводов с повторяющимися конструктивными элементами ( $U_{01} = U_0$ ,  $k_i = k_{\text{кл}}$ ) можно записать

$$U = \frac{k_{\text{кл}} U_0}{n - k_{\text{кл}} (n - 1)}, \quad (3.18)$$

где  $n$  — число повторяющихся элементов.



**Рис. 3.1. Исходная (а) и расчетная модели (б) анализируемой вакуумной системы: 1, 2 — вакуумные камеры; 3 — трубопровод, состоящий из элементарных каналов; A, B, C — условные камеры большого объема**

### 3.2.3. Алгоритм расчета проводимости по теореме аддитивности обратной проводимости

Для проверки точности каждого из методов по сравнению с методом Монте-Карло рассчитаем цилиндрические трубопроводы с одинаковыми площадями сечений, которые состоят из 1, 10, 100 и 1000 одинаковых частей.

Так как рассматриваем общую задачу, то для удобства введем обозначение:

$$U_i = 36,4 F_i k_i \sqrt{\frac{T}{\mu}} = A_i k_i. \quad (3.19)$$

Выражения для модифицированной проводимости примут вид:

$$U_{mi} = \frac{k_i}{1 - k_i} A_i = \frac{U_i}{1 - U_i/A_i}; \quad (3.20)$$

$$U_m = \frac{U}{1 - U/A}. \quad (3.21)$$

1. Зная  $L/R$ , определяем коэффициент Клаузинга по таблицам, представленным в [1].

2. Находим проводимость каждого элемента конструкции по формуле (3.19).

3. Рассчитываем модифицированную проводимость участков трубопровода  $U_{mi}$  по (3.20).

4. По (3.21) находим суммарную модифицированную проводимость. С учетом того, что трубопровод несужающийся, имеем

$$U_{m\Sigma}^{-1} = \sum_{i=1}^n U_{mi}^{-1}. \quad (3.22)$$

5. Учитывая выражение (3.11), получаем соотношение для расчета общей проводимости:

$$U_{\Sigma} = \frac{U_{m\Sigma}}{1 + U_{m\Sigma}/A}. \quad (3.23)$$

### 3.2.4. Сравнение значений суммарной проводимости при ее расчетах разными методами

Приведем расчет сложного трубопровода по предложенному выше алгоритму. Рассматриваемые трубопроводы состоят из 10, 100, 1000 и 10 000 дискретных конструктивных элементов с постоянным отношением  $L/R = 0,1$ .

## 1. Расчет по теореме аддитивности обратной проводимости.

Для различных вариантов можно записать:

при  $L/R = 0,1 \rightarrow k_{\text{кл}} = 0,9524$

$$U_{\Sigma 1} = \frac{0,9524 A}{1 - 0,9524} = 20,0084 A ;$$

при  $L/R=1$  (10 элементов трубопровода)

$$U_{\Sigma 10} = 20,0084 \cdot 10^{-1} A ;$$

$$U_{\Sigma 10} = \frac{20,0084 \cdot 10^{-1} A}{1 + 20,0084 \cdot 10^{-1} A/A} = 0,6668 A ;$$

при  $L/R=10$  (100 элементов)

$$U_{\Sigma 100} = 20,0084 \cdot 10^{-2} A ;$$

$$U_{\Sigma 100} = \frac{20,0084 \cdot 10^{-2} A}{1 + 20,0084 \cdot 10^{-2} A/A} = 0,667 A ;$$

при  $L/R=100$  (1000 элементов)

$$U_{\Sigma 1000} = 20,0084 \cdot 10^{-3} A ;$$

$$U_{\Sigma 1000} = \frac{20,0084 \cdot 10^{-3} A}{1 + 20,0084 \cdot 10^{-3} A/A} = 0,0196 A ;$$

при  $L/R=1000$  (10 000 элементов)

$$U_{\Sigma 10\ 000} = 20,0084 \cdot 10^{-4} A ;$$

$$U_{\Sigma 10\ 000} = \frac{20,0084 \cdot 10^{-4} A}{1 + 20,0084 \cdot 10^{-4} A/A} = 1,997 \cdot 10^{-3} A .$$

**2. Метод разбиения на «элементарные» каналы.** Рассчитаем проводимости составных трубопроводов, геометрически подобных приведенным в п. 1, с использованием (3.11) для  $k_{\text{кл}} = 0,9524$ :

при  $L/R = 1$  (10 элементов)

$$U_{\Sigma 10} = \frac{0,9524^2 A}{10 - 9 \cdot 0,9524} = 0,635 A ;$$

при  $L/R=10$  (100 элементов)

$$U_{\Sigma 100} = \frac{0,9524^2 A}{100 - 99 \cdot 0,9524} = 0,1588 A ;$$



при  $L/R = 100$  (1000 элементов)

$$U_{\Sigma 1000} = \frac{0,9524^2 A}{1000 - 999 \cdot 0,9524} = 0,01868 A ;$$

при  $L/R=1000$  (10 000 элементов)

$$U_{\Sigma 10\,000} = \frac{0,9524^2 A}{10\,000 - 9999 \cdot 0,9524} = 1,902 \cdot 10^{-3} A .$$

**3. Метод расчета суммарной проводимости по аналогии с электрическими цепями.** Проведем такой же расчет по формуле (3.4), аналогичной формуле для электрических цепей с последовательным соединением проводников.

Коэффициент Клаузинга при  $L/R = 0,1$  равен 0,9524, следовательно,

$$U_{\Sigma 1} = k_{\text{кл}} A = 0,9524 A .$$

При увеличении длины в 10 раз мы получаем десять участков трубопровода с одинаковыми геометрическими параметрами, тогда

$$\frac{1}{U_{\Sigma 10}} = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{U_i} = 10 \cdot \frac{1}{0,9524 A} ;$$

$$U_{\Sigma 10} = 0,9524 \cdot 10^{-1} A .$$

Аналогично определяются проводимости для 100, 1000 и 10 000 участков трубопровода:

$$U_{\Sigma 100} = 0,9524 \cdot 10^{-2} A ;$$

$$U_{\Sigma 1000} = 0,9524 \cdot 10^{-3} A ;$$

$$U_{\Sigma 10\,000} = 0,9524 \cdot 10^{-4} A .$$

В табл. 3.1 даны значения суммарной проводимости сложного трубопровода, рассчитанные по аналогии с электрическими цепями  $U^*$ , по теореме аддитивности  $U_{\text{та}}$ , соотношению Клаузинга  $U_{\text{кл}}$  [см. (3.2)] и методу разбиения на «элементарные» каналы  $U_{\text{э,к}}$  [см. (3.18)]

Таблица 3.1

**Суммарные проводимости сложного трубопровода, найденные разными методами**

$L/R$	$U_{\text{та}}$	$U^*$	$U_{\text{кл}}$	$U_{\text{э,к}}$
1	0,6668A	$9,524 \cdot 10^{-2} A$	0,6720A	0,6350A
10	0,1667A	$9,524 \cdot 10^{-3} A$	0,1973A	0,1588A
100	0,01962A	$9,524 \cdot 10^{-4} A$	0,02558A	0,01868A
1000	0,001997A	$9,524 \cdot 10^{-5} A$	0,002658A	0,0019A

Погрешности значений проводимостей, рассчитанных по (3.4), (3.13) и (3.18), относительно  $U_{\text{кл}}$  представлены ниже:

$L/R$ .....	1	10	100	1000
$U_{\text{кл}}/U_{\text{т.а}}$ .....	1,008	1,184	1,304	1,331
$U_{\text{кл}}/U_{\text{э.к}}$ .....	1,058	1,242	1,369	1,398
$U_{\text{кл}}/U^*$ .....	7,056	20,716	26,858	27,908

Расчеты суммарной проводимости по предложенным методикам дают завышенные результаты по сравнению со значением, полученным по формуле Клаузинга.

При вычислении проводимости последовательно соединенных конструкций по часто предлагаемой формуле (3.4) получаются достаточно большие погрешности по сравнению с точными значениями, найденными путем аналитического решения уравнения Клаузинга. При увеличении числа элементов трубопровода (разбиений) эта погрешность значительно возрастает, за счет чего применять данную формулу для расчетов вакуумной системы не рекомендуется.

Вычисления по теореме аддитивности обратной проводимости и по методу разбиения на «элементарные» каналы дают приблизительно одинаковые погрешности. Для оценочных расчетов можно исходить из удобства применения того или другого метода, но для получения более точных результатов при большом числе конструктивных элементов предпочтительнее использовать формулу (3.13).

В каждом элементе на поток частиц оказывает влияние обратный встречный поток молекул, который возникает из-за рассеивания в последующих элементах системы. Таким образом, молекулярные потоки в смежных элементах влияют друг на друга. Это взаимное влияние учитывается при расчете  $U$  по (3.10).

Методика, основанная на толковании сопротивления каждого канала как разности полного сопротивления и сопротивления входного сечения канала, бесспорна. Однако изменение характера диффузного распределения молекул на входе во второй и последующие каналы в реальном случае дает некоторую погрешность.

### 3.2.5. Пример расчета сложного трубопровода

Определим суммарную проводимость сложного трубопровода методами: классическим, Монте-Карло, разбиения на «элементарные» каналы и с использованием теоремы аддитивности обратной проводимости.

Трубопровод (рис. 3.2), соединяющий откачиваемый объем 1 с входным патрубком вакуумного насоса 6, состоит из цилиндрического участка 2 длиной  $L_2 = 1$  м и диаметром  $D_2 = 0,5$  м, переходника 3 длиной  $L_3 = 0,23$  м и диаметром  $D_3 = 0,38$  м, прямого вакуумного затвора 4 длиной  $L_4 = 0,38$  м и диаметром  $D_4 = D_3 = 0,38$  м, цилиндрического участка 5

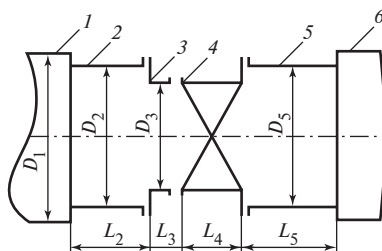


Рис. 3.2. Схема к расчету проводимости трубопровода

длиной  $L_5 = 0,58$  м и диаметром  $D_5 = D_2 = 0,5$  м. Определяющий размер откачиваемого объема  $D_1 = 10$  м, быстрота действия вакуумного насоса  $S_n = 5$  м<sup>3</sup>/с при давлении во входном патрубке насоса  $p_6 = 10^{-3}$  Па. Откачиваемый газ — воздух с температурой 293 К. Определить быстроту откачки  $S$ , давление  $p_1$  в объеме и проводимость трубопровода.

**1. Расчет сложного трубопровода классическим методом.** Для определения режима течения в цилиндрическом трубопроводе 5 рассчитаем число Кнудсена:

$$Kn = \frac{\lambda}{D_5} = \frac{4,7 \cdot 10^{-3}}{p_6 D_5} = \frac{4,7 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 0,5} = 9,4.$$

Так как  $Kn > 0,33$ , то режим течения газа в этой части трубопровода молекулярный.

Определим проводимость цилиндрического трубопровода:

$$U_5 = 116 k_5 F_5 = 116 \cdot 0,664 \cdot 0,196 = 15,097 \text{ м}^3/\text{с},$$

где  $k_5 = 0,664$  при  $L_5 / D_5 = 1,16$ ;  $F = \pi D_5^2 / 4 = 0,196 \text{ м}^2$ .

Из соотношения  $Q = S_n p_6 = U_5 (p_5 - p_6)$  давление на входе в трубопровод

$$p_5 = p_6 (S_n / U_5 + 1) = 10^{-3} \cdot (5 + 15,097) / 15,097 = 1,331 \cdot 10^{-3} \text{ Па}.$$

Проверим режим течения на участке 5 и в вакуумном затворе 4:  $Kn = 9,293 > 0,33$ .

Проводимость вакуумного затвора

$$U_4 = 116 k_4 F_4 = 116 \cdot 0,541 \cdot 0,113 = 6,762 \text{ м}^3/\text{с},$$

где  $k_4 = 0,541$  при  $L_4 / D_4 = 1$ ;  $F_4 = \pi D_4^2 / 4 = 0,113 \text{ м}^2$ .

Из соотношения  $Q = U_4 (p_4 - p_5)$  определим давление  $p_4$  на входе в затвор 4:

$$p_4 = p_5 + Q / U_4 = 1,331 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} / 6,762 = 2,07 \cdot 10^{-3} \text{ Па}.$$

Проверим режим течения в затворе 4 и переходнике 3:

$$\text{Kn} = \frac{4,7 \cdot 10^{-3}}{0,38 p_4} = 5,975 > 0,33.$$

Так как вход в переходник 3 из цилиндрического трубопровода 2 необходимо рассматривать как большую диафрагму ( $D_2/D_3 = 1,316$ ), то определим проводимость переходника 3 с учетом влияния изменения площади сечения в виде

$$U_3 = 116 k_3 F_3 \frac{F_2}{F_2 - F_3} = 116 \cdot 0,632 \cdot 0,113 \frac{0,196}{0,196 - 0,113} = 19,563 \text{ м}^3/\text{с},$$

где  $k_3 = 0,632$  при  $L_3/D_3 = 0,605$ ;  $F_3 = \pi D_3^2/4 = 0,113 \text{ м}^2$ ;  $F_2 = \pi D_2^2/4 = 0,196 \text{ м}^2$ .

Давление на входе в переходник 3

$$p_3 = p_4 + Q/U_3 = 2,07 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3}/19,563 = 2,326 \cdot 10^{-3} \text{ Па}.$$

Проверим режим течения на выходе из цилиндрического участка 2 трубопровода:

$$\text{Kn} = \frac{4,7 \cdot 10^{-3}}{p_3 D_2} = \frac{4,7 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,326} = 4,042 > 0,33.$$

Так как  $D_1/D_2 = 20$ , то вход в цилиндрический участок трубопровода рассматриваем как малую диафрагму с проводимостью

$$U_2 = 116 k_2 F_2 = 116 \cdot 0,359 \cdot 0,196 = 8,162 \text{ м}^3/\text{с},$$

где  $k_2 = 0,359$  при  $L_2/D_2 = 2,0$ .

Вычислим давление в откачиваемом объеме:

$$p_1 = p_2 = p_3 + Q/U_2 = 2,326 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3}/8,162 = 2,938 \cdot 10^{-3} \text{ Па}.$$

Проверим режим течения на цилиндрическом участке 2:

$$\text{Kn} = \frac{4,7 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,938} = 3,2 > 0,33,$$

т.е. режим течения молекулярный.

Быстрота откачки объема  $I$

$$S = Q/p_1 = 5 \cdot 10^{-3}/2,938 \cdot 10^{-3} = 1,702 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Определяем проводимость всего трубопровода

$$U = Q/(p_1 - p_6) = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2,938 \cdot 10^{-3} - 10^{-3}} = 2,58 \text{ м}^3/\text{с}.$$

**2. Расчет сложного трубопровода по теореме аддитивности обратной проводимости.** Используем значения проводимостей  $U_i$  каждого элемента конструкции, полученные выше, которые подста-

вим в формулу для расчета общей проводимости (3.14). С учетом (3.18) имеем  $F_i v / 4 = U_i / k_i = 116 F_i$ .

Таким образом, теорема аддитивности принимает вид

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U_1/k_1} + \sum_{i=2}^4 \left( \frac{1}{U_i} - \frac{1}{U_i/k_i} \right) + \frac{1}{U_{a2}},$$

где  $U_{a2}$  рассчитывается следующим образом:

$$U_{a2} = \frac{U_3/k_3}{1 - F_3/F_2} = \frac{8,284/0,632}{1 - 0,113/0,196} = 31,031 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{8,162} + \frac{1 - 0,664}{15,097} + \frac{1 - 0,514}{6,762} + \frac{1 - 0,632}{8,284} + \frac{1}{31,031} = 0,293 \text{ с/м}^3.$$

Проводимость всего трубопровода  $U = 3,41 \text{ м}^3/\text{с}$ .

**3. Расчет сложного трубопровода по методу разбиения на «элементарные» каналы.** Подставляя в формулу (3.17) выражение для проводимости входного сечения (3.15), получаем расчетное соотношение

$$U = \frac{1}{W} = \left[ \frac{1}{116 F_1 k_1} + \sum_{i=2}^4 \frac{1}{116 F_i} \frac{1 - k_i}{k_i} \right]^{-1}.$$

Значения площадей входных сечений и коэффициентов Клаузинга для каждого участка трубопровода рассчитаны выше. Следовательно,

$$W = \frac{1}{116 \cdot 0,359 \cdot 0,196} + \frac{1 - 0,632}{116 \cdot 0,113 \cdot 0,632} + \frac{1 - 0,514}{116 \cdot 0,113 \cdot 0,514} + \frac{1 - 0,37}{116 \cdot 0,196 \cdot 0,37} = 0,314 \text{ с/м}^3;$$

$$U = \frac{1}{W} = \frac{1}{0,314} = 3,1857 \text{ м}^3/\text{с}.$$

**4. Сравнение суммарной проводимости, полученной различными методами.** При выполнении программы, которая реализует метод Монте-Карло, получено значение вероятности прохождения (коэффициента Клаузинга). Для рассматриваемого выше трубопровода  $k_{\text{кл}} = 0,18$ .

Суммарную проводимость трубопровода вычислим с использованием соотношения Клаузинга (3.2):

$$U = 116 k_{\text{кл}} F = 116 \cdot 0,18 \cdot 0,196 = 4,17 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Далее найдем погрешности проводимостей, полученных различными методами, относительно значения, определенного методом Монте-Карло:

$$\Delta_{\text{т.а}} = \frac{U_{\text{кл}} - U_{\text{т.а}}}{U_{\text{кл}}} \cdot 100 = \frac{4,17 - 3,41}{4,17} \cdot 100 = 18,3 \%;$$

$$\Delta_{\text{э.к}} = \frac{U_{\text{кл}} - U_{\text{э.к}}}{U_{\text{кл}}} \cdot 100 = \frac{4,17 - 3,1857}{4,17} \cdot 100 = 23,6 \%;$$

$$\Delta^* = \frac{U_{\text{кл}} - U^*}{U_{\text{кл}}} \cdot 100 = \frac{4,17 - 2,58}{4,17} \cdot 100 = 38,1 \%.$$

Сравнение полученных значений показывает, что наиболее точный результат дает расчет по теореме аддитивности обратной проводимости. Наибольшее отклонение проводимости от ее значения, найденного по методу Монте-Карло, получается при использовании метода расчета по аналогии с электрическими цепями.

Выше рассматривались четыре альтернативные методики вычисления суммарной проводимости сложного трубопровода. Безусловно, более эффективным и точным является способ расчета по методу Монте-Карло. Различные тракты с характерными для практики конфигурациями рассчитывались по этому методу рядом исследователей. Сравнение полученных зависимостей коэффициента Клаузинга от геометрических размеров трубопровода с экспериментальными данными дало высокую степень совпадения результатов. Остальные рассмотренные методики можно применять лишь для приблизительных расчетов суммарной проводимости.

Проанализирован метод расчета, который базируется на теореме аддитивности обратной проводимости. Хорошее согласование полученной суммарной проводимости с характеристикой Монте-Карло говорит о предпочтительности применения этой методики по сравнению с традиционной.

Вследствие возрастания числа конструктивных элементов в вакуумном трубопроводе (увеличения числа разбиений) получение более или менее точного значения проводимости всего трубопровода становится невозможным при традиционном подходе к расчету общей проводимости по формуле (3.4).

Учет взаимного влияния в соседних частях прямого и обратного молекулярных потоков позволяет получить закономерности, на основе которых доказывается теорема аддитивности. Также одним из главных достоинств предложенной методики является простота расчетов: не требуется никаких дополнительных табличных данных по сравнению с традиционным подходом. Однако в качестве недостатков

необходимо отметить, что теорема не учитывает влияние на проводимость таких конструктивных элементов, как диафрагма (рассматривается как проходное сечение) или колено трубопровода. В этих случаях, а также при малом числе элементов тракта желательное использование традиционного подхода.

В основе способа разбиения на «элементарные» каналы лежит подобие пространственного распределения плотности молекулярных потоков на выходе из каждого тракта равномерному распределению. При полном совпадении равномерного и реального распределений по формуле (3.18) можно получить достаточно точные результаты. Как видно из приведенных в [5] данных, для части каналов это утверждение справедливо. Однако для структур с лепестковым распределением при больших значениях степени  $n$  применение этой методики может давать значительные погрешности. При оценке возможной в этих случаях погрешности авторы указывают цифры, не превышающие 20 % по сравнению с проводимостью трубопровода, вычисленной по методу Монте-Карло. Такое значение погрешности является удовлетворительным для инженерной практики. Также необходимо отметить, что с точки зрения проводимых вычислений данный метод является самым простым. Недостатки данного метода аналогичны недостаткам расчета по теореме аддитивности.

В данном параграфе была показана некорректность применения подхода С. Дэсмана к расчету суммарной проводимости. С учетом полученных результатов и анализа погрешностей расчетов сложных трубопроводов по всем рассмотренным методикам можно рекомендовать как более предпочтительный для точных вычислений метод Монте-Карло, для оценочных расчетов — схему, которая базируется на теореме аддитивности обратной проводимости, и для достаточно быстрого инженерного расчета — методику разбиения на «элементарные» каналы.

### **3.3. РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ОТКАЧНЫХ СИСТЕМ**

#### **3.3.1. Расчет проводимости и коэффициента захвата криолоушки с учетом формирующегося криослоя**

В некоторых технологиях, в частности, в области микроэлектроники, целлюлозно-бумажной промышленности и других для обеспечения процесса производства требуется откачивать из рабочего объема смесь газов, в состав которой входят неконденсируемые (азот, аргон и т.п.) и конденсируемые (пары воды, некоторые углеводороды, углекислый газ и др.) газы. Турбомолекулярный насос плохо откачивает воду, что приводит к обогащению смеси, образующейся в техно-

логическом процессе, парами воды. Чтобы избежать этого, их вымораживают в низкотемпературных ловушках, которые устанавливают между откачиваемым объемом и турбомолекулярным насосом.

Основная проблема, возникающая при эксплуатации низкотемпературных ловушек, заключается в том, что твердый конденсат (криослой), формирующийся на охлаждаемых пластинах, уменьшает площадь проходного сечения и тем самым снижает проводимость неконденсируемых газов. Форма криослоя, формирующегося на охлаждаемых пластинах, существенно влияет как на проводимость (относительную проводимость, т. е. коэффициент Клаузинга), так и на коэффициент захвата ловушки.

### Расчет криоловушки

Для определения профиля криослоя, формирующегося на охлаждаемых пластинах ловушки, применяется метод Монте-Карло пробной частицы. Для расчета была взята серийная ловушка АТ-200 (рис. 3.3), выпускаемая фирмой APD. Охлаждаемая часть ловушки представляет собой набор плоскопараллельных пластин, расположенных внутри кольца. Пластины и кольцо охлаждаются с помощью криогенератора до температуры 100—120 К.

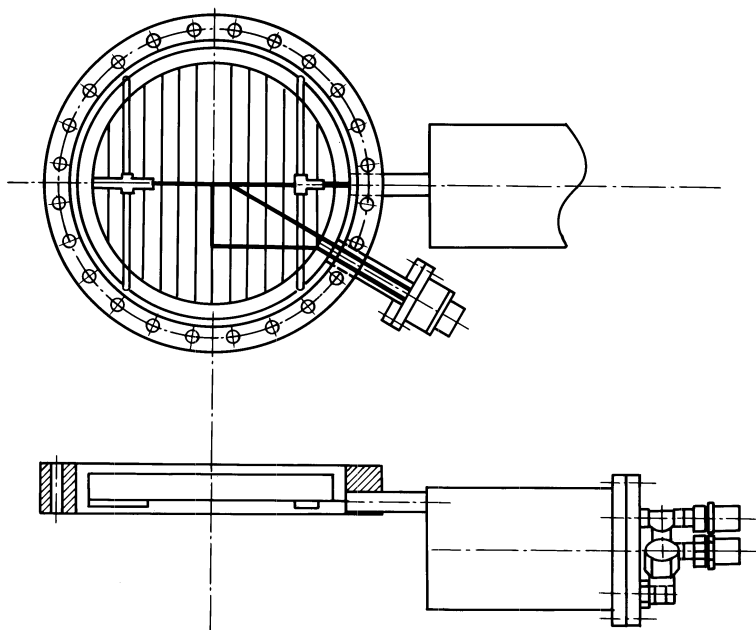


Рис. 3.3. Ловушка АТ-200



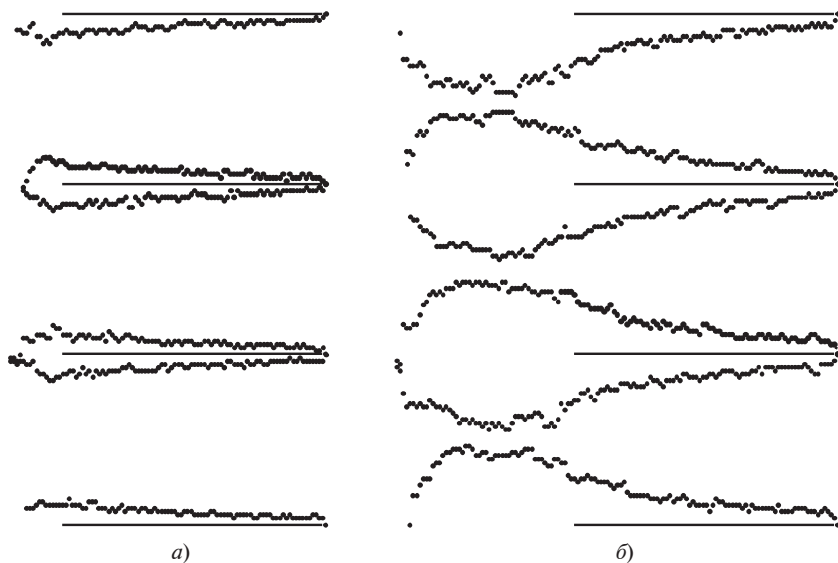


Рис. 3.4. Профили криослоя:  
а —  $t = 0,167$ ; б —  $t = 0,833$

На рис. 3.4 показаны профили криослоя в различные моменты времени работы ловушки АТ-200. Безразмерное время  $t = 1$  соответствует периоду, в течение которого в трубопровод, соединяющий откачиваемый объем и ловушку, влетело 12 000 000 частиц размером 0,25 мм.

Полученные профили криослоя описываются с помощью кусочно-линейной аппроксимации. Проводимость и коэффициент захвата вычисляются для аппроксимированного слоя.

Зависимости проводимости ( $k_{\text{Кл}}$ ) и коэффициента захвата  $K_{\text{захв}}$  ловушки АТ-200 от времени  $t$ , полученные с учетом формы намороженного криослоя, приведены на рис. 3.5. Для сравнения на этом рисунке штриховыми линиями показаны зависимости проводимости и коэффициента захвата для случая, когда криослой формиру-

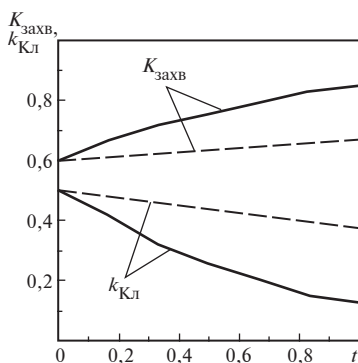


Рис. 3.5. Зависимости проводимости ( $k_{\text{Кл}}$ ) и коэффициента захвата  $K_{\text{захв}}$  ловушки АТ-200 от безразмерного времени  $t$

ется равномерно по поверхности пластин (без учета формы ранее сформированного слоя). Из рисунка видно, что форма криослоя значительно влияет на значения проводимости и коэффициента захвата ловушки. С ростом  $t$  (увеличением толщины криослоя) повышается влияние формы образующегося криослоя. За счет намерзания криослоя на пластинах увеличивается площадь конденсирующей поверхности, что приводит к росту коэффициента захвата ловушки и уменьшению ее проводимости. Такое расположение охлаждаемых пластин вызывает образование основной части криослоя на передней кромке (см. рис. 3.4).

### Измененная конструкция ловушки АТ-200

Образованный на передней кромке криослой, во-первых, приводит к неэффективному использованию всей поверхности охлаждаемых пластин, так как он не позволяет проходить парам конденсирующегося газа к их задней части, и, во-вторых, может вызвать быстрое забивание входного сечения ловушки твердым конденсатом. Рассмотрим конструкцию ловушки, у которой расположение охлаждаемых пластин незначительно изменено. Это изменение заключается в смещении передних кромок соседних пластин относительно друг друга.

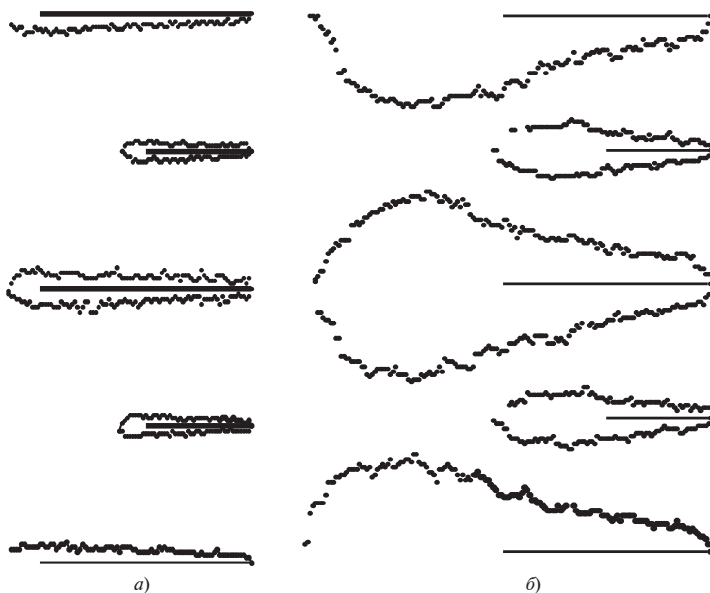


Рис. 3.6. Профили криослоя:  
а —  $t = 0,167$ ; б —  $t = 1,333$

Для новой конструкции ловушки были получены профили криослоя, формирующегося на охлаждаемых пластинах (рис. 3.6). При сравнении рис. 3.4 и 3.6 видно, что новая конструкция позволяет значительно продлить работу ловушки до полного забивания ее входного сечения твердым конденсатом. Смещение передних кромок позволяет также более эффективно использовать заднюю часть охлаждаемых пластин. Сравнение характеристик старой и новой конструкций ловушки АТ-200 приводится в табл. 3.2.

Таблица 3.2

**Сравнение характеристик старой и новой конструкций ловушки АТ-200**

$t$	Расположение пластин				$\delta K_{\text{захв}} = \frac{\Delta K_{\text{захвл}}}{K_{\text{захвл}i}} \cdot 100, \%$	$\delta k_{\text{Кл}} = \frac{\Delta k_{\text{Кл}i}}{k_{\text{Кл}i}} \cdot 100, \%$
	старое		новое			
	Коэф- фициент захвата $K_{\text{захвл}}$	Про- води- мость $(k_{\text{Кл}1})$	Коэф- фициент захвата $K_{\text{захв2}}$	Про- води- мость $(k_{\text{Кл}2})$		
0	0,5941	0,5159	0,5370	0,5520	— 9,611	6,997
0,167	0,6638	0,4149	0,6129	0,4638	— 7,668	11,786
0,333	0,7173	0,3173	0,6670	0,3871	— 7,012	21,998
0,500	0,7514	0,2529	0,7175	0,3309	— 4,512	30,842
0,667	0,7894	0,1982	0,7534	0,2800	— 4,560	41,271
0,833	0,8237	0,1439	0,7805	0,2446	— 5,245	69,979
1,000	0,8439	0,1187	0,8097	0,2039	— 4,053	71,778
1,167	—	—	0,8453	0,1638	—	—
1,333	—	—	0,8663	0,1414	—	—

Изменение конструкции охлаждаемой поверхности ловушки АТ-200 позволяет получить значительное повышение проводимости при небольшом уменьшении коэффициента захвата ловушки и увеличить время регенерации ловушки на 30—40 %. Также следует отметить, что предложенное изменение охлаждаемой поверхности является незначительным и не требует изменения габаритных размеров ловушки.

### 3.3.2. Расчет и проектирование крионасоса

Одной из наиболее значимых характеристик крионасоса является быстрота действия. Она определяет время эффективного функционирования насоса и, следовательно, режим его работы.

Построим компьютерную модель крионасоса типичной конструкции и изучим на основе результатов расчетов этой модели зависимо-

сти быстроты действия насоса от различных параметров. Эти параметры можно разделить на две большие группы: параметры вакуумной и тепловой систем.

К первой группе можно отнести:

- коэффициенты прилипания разных поверхностей (под коэффициентом прилипания понимается вероятность того, что после взаимодействия с поверхностью частица останется на ней, или, иначе, коэффициент прилипания — это отношение числа «прилипших» частиц к числу ударившихся о поверхность, например если на поверхности осталось 300 частиц, а ударились 1000, то коэффициент прилипания равен 0,3);
- конфигурация насоса (под конфигурацией подразумевается не только характер расположения поверхностей, но и структура размещения сорбента на этих поверхностях);
- количество накопленного газа (от данного параметра зависят коэффициент прилипания и конфигурация насоса, поскольку при накоплении значительного количества газа на поверхностях возможно серьезное изменение его геометрических характеристик; например, слой сконденсировавшегося на экране газа может частично перекрыть входное сечение насоса и снизить быстроту его действия).

Во вторую группу входят:

- температуры различных частей насоса или тепловая нагрузка (это одна из наиболее влиятельных характеристик — от нее зависит коэффициент прилипания поверхности: чем выше температура, тем меньше коэффициент прилипания);
- качество тепловой изоляции холодной части крионасоса. Этот параметр оказывает серьезное влияние на температуру (поскольку основная доля теплопритоков к холодной части насоса — это теплопритоки излучением, то решающую роль играют теплоизолирующие характеристики экрана).

Программа, реализовавшая расчет крионасоса методом Монте-Карло, позволила выяснить влияние на быстроту действия следующих характеристик: конфигурации насоса, тепловых характеристик, режимов работы, задаваемых пользователем коэффициентов прилипания различных поверхностей, количества накопленного газа. Программа позволяет также выполнять вакуумный и тепловой расчеты и оптимизировать методом вариантных расчетов дизайн насоса, учитывая при этом и тепловые параметры.

## Анализ типовой конструкции крионасоса

**Описание типовой конструкции крионасоса [6].** Конструкцию крионасоса в зависимости от конденсируемого газа можно условно разделить на две ступени. Первая, состоящая из жалюзийного экрана и цилиндрического кожуха (см. рис. 2.26), предназначена для конденсации паров воды.

Вторая ступень имеет форму «елочки» и образована коническими поверхностями. Она предназначена для конденсации водорода и аргона, так как имеет более низкую температуру и на ее поверхностях размещен сорбент (активированный уголь).

Жалюзийный экран состоит из металлических усеченных конусов с углом наклона  $45^\circ$  (см. рис. 2.26, *поз. II*). Он имеет температуру около 45 К, достаточную для конденсации частиц воды с вероятностью, близкой к единице. Конусы подвешены на четырех прямоугольных пластинах, которые, в свою очередь, прикреплены к металлическому кожуху (см. рис. 2.26, *поз. I*), температура которого около 40 К.

«Елочка» представляет собой металлический цилиндр с прикрепленными к нему под углом  $60^\circ$  усеченными конусами (см. рис. 2.26, *поз. III*). Температура конусов в местах закрепления составляет примерно 10 К, а на противоположных концах равна 15 К. Такой температурный уровень позволяет конденсироваться аргону на любой поверхности «елочки», в том числе на цилиндре, конусах и «крышке» цилиндра. На конусы нанесен активированный уголь для адсорбции водорода или гелия (т. е. к поверхностям «елочки», не имеющим сорбента, водород или гелий не прилипает). На панелях экрана и на кожухе коэффициент захвата водорода, гелия и аргона считается очень близким к нулю (частицы не захватываются).

**Сравнение результатов предварительного расчета с экспериментальными данными.** Были рассчитаны значения коэффициентов захвата насоса для аргона и водорода при постоянных коэффициентах прилипания, равных единице (и по аргону, и по водороду). Подобная постановка позволяла получить оценочные результаты работы. Таким образом, значения коэффициентов захвата составили: для аргона  $K_{\text{захв}}^{\text{Ar}} = 0,407718$  (при числе испытаний  $N_{\text{общ}} = 10\,132$ ); для водорода  $K_{\text{захв}}^{\text{H}_2} = 0,226178$  (при  $N_{\text{общ}} = 10\,169$ ).

Воспользовавшись формулой для нахождения быстроты действия насоса по коэффициенту захвата, получим следующие результаты.

Площадь входного сечения  $F = \pi R^2 = \pi \cdot 0,096^2 = 0,02895 \text{ м}^2$ . Быстрота действия насоса по аргону

$$S_{\text{H}}^{\text{Ar}} = 36,4 K_{\text{захв}}^{\text{Ar}} F \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 36,4 \cdot 0,407718 \cdot 0,02895 \cdot \sqrt{\frac{293}{40}} = 1,16294 \text{ м}^3/\text{с} = 1163 \text{ л/с}.$$

Быстрота действия насоса по водороду

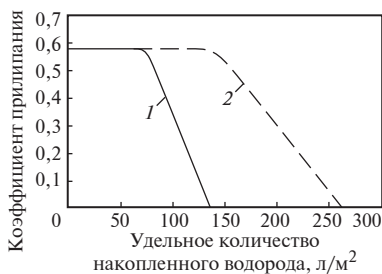
$$S_{\text{H}}^{\text{H}_2} = 36,4 \cdot 0,226178 \cdot 0,02895 \sqrt{\frac{293}{2}} = 2,88482 \text{ м}^3/\text{с} = 2885 \text{ л/с}.$$

Экспериментальные данные (в начальный момент времени, когда коэффициенты прилипания максимальны) фирмы APD следующие:  $S_{\text{H}}^{\text{Ar}} = 1250 \text{ л/с}$ ;  $S_{\text{H}}^{\text{H}_2} = 3000 \text{ л/с}$ .

Таким образом, в первом приближении (без учета зависимости коэффициентов прилипания от количества накопленного газа) программа показала удовлетворительную сходимость полученных результатов с экспериментальными данными.

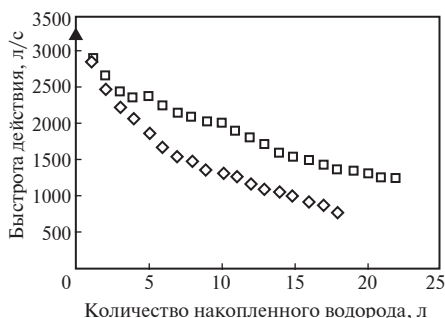
**Изменение коэффициента захвата системы по водороду в зависимости от переменных коэффициентов прилипания.** Для моделирования процесса течения газа в насосе с переменными коэффициентами прилипания была использована зависимость, представленная на рис. 3.7. Данные зависимости были получены экспериментально для сорбента того же типа, что используется в анализируемом крионасосе. Изменение коэффициентов прилипания производилось индивидуально для каждой поверхности структуры, что является принципиальным условием для построения правильной модели.

Результаты расчета зависимости коэффициента захвата крионасоса (быстроты действия) от количества накопленного водорода показаны



**Рис. 3.7. Зависимости коэффициента прилипания от удельного количества накопленного водорода**

на рис. 3.8. Большие изменения значений быстроты действия в начале накопления водорода обусловлены низкой точностью работы программы (коэффициент захвата или быстрота действия подсчитывается по результатам нескольких проведенных испытаний, таким образом, в начале процесса число испытаний было мало по сравнению с завершающей стадией: 100—200 против 10 000—20 000).



**Рис. 3.8. Зависимости скорости действия насоса от количества накопленного водорода для разных типов зависимостей коэффициента прилипания:**

◇ — расчетные значения для кривой 1 (см. рис. 3.7); □ — то же для кривой 2; ▲ — экспериментальные данные

Надо сказать, что при модификации зависимости коэффициента прилипания от удельного количества накопленного водорода (см. рис. 3.7, кривая 2) меняется зависимость скорости действия насоса от накопления  $H_2$  (рис. 3.8). Это позволяет найти эффективную зависимость коэффициента прилипания от накопления, которая минимизирует разницу между расчетными и экспериментальными данными, а затем, используя эту зависимость, оптимизировать конструкцию насоса.

Зная геометрические характеристики, находим площадь поверхности, занимаемой сорбентом:  $F_{\Sigma} = 0,17 \text{ м}^2$ .

Максимальное удельное количество поглощенного водорода  $C_{\text{уд}} = 132 \text{ л/м}^2$ . Таким образом, максимальное количество поглощенного крионасосом водорода составляет

$$C = F_{\Sigma} C_{\text{уд}} = 0,17 \cdot 132 = 22,44 \text{ л.}$$

По экспериментальным данным, предоставленным компанией APD-IGC Cryogenics Inc., максимальная сорбционная емкость насоса Marathon-8 по водороду равна 30 л. Данное расхождение результатов объясняется тем, что зависимость коэффициента прилипания по водороду от накопления приведена для отличного от используемого в крионасосе сорбента, хотя и аналогичного типа.

**Зависимость скорости действия насоса от его геометрических характеристик.** Рассмотрим зависимость скорости действия насоса от площади поверхности, занимаемой сорбентом (зависимости от конфигурации насоса будут рассмотрены ниже).

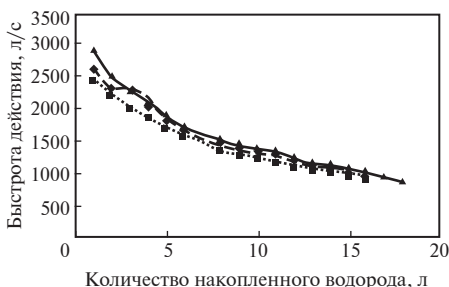
Нетрудно понять, что максимальное количество накопленного водорода напрямую связано с площадью, занимаемой сорбентом. Это количество характеризует точка пересечения графика зависимости

быстроты действия от накопления с осью абсцисс. Чем дальше от нуля эта точка, тем больше водорода сможет принять система. Поэтому можно сформулировать следующую рекомендацию: если необходимо повысить емкость насоса по водороду (гелию), то нужно увеличить площадь, занимаемую сорбентом.

**Зависимость быстроты действия насоса по водороду от начального значения коэффициента прилипания.** Чтобы провести исследование зависимости быстроты действия от начального значения коэффициента прилипания, были изменены зависимости коэффициентов прилипания от накопления. Это было сделано следующим образом.

Вместо начального значения коэффициента прилипания, равного 0,58, были взяты значения 0,5 и 0,4. Таким образом, график (см. рис. 3.7) как бы «проседал», при этом максимальное количество накопленного водорода и точка перегиба (по оси абсцисс) оставались теми же.

Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 3.9. Исходя из полученных данных, можно сделать вывод, что изменение коэффициента прилипания в небольших пределах незначительно влияет на быстроту действия насоса. Это объясняется конструкцией поверхностей насоса с нанесенным сорбентом (если частица залетает в пространство между криопанелями, то даже при небольшом значении коэффициента прилипания низка вероятность того, что она вылетит назад), однако изменение характеристик коэффициента прилипания по отношению к накоплению (см. рис. 3.7) может значительно сказаться на зависимости быстроты действия от количества накопленного газа (см. рис. 3.8).



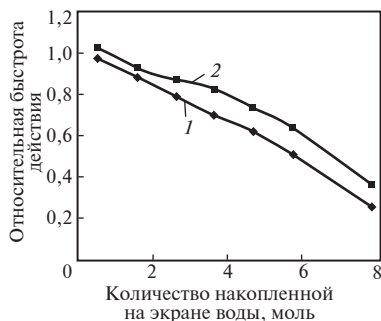
**Рис. 3.9. Зависимости быстроты действия насоса от количества накопленного водорода при различных начальных значениях коэффициента прилипания**



**Зависимость быстроты действия насоса от количества накопленной воды.** Зависимости относительной быстроты действия крионасоса по аргону и водороду от количества накопленной воды показаны на рис. 3.10. Нужно обратить внимание на то, что для аргона и водорода эти зависимости имеют разный характер. Однако, как видно из рис. 3.10, эта разница не очень велика, и, по-видимому, данное расхождение определяется в основном не значением обратного потока, а, скорее, геометрическим положением мест прилипания данного газа, поскольку сам обратный поток зависит от геометрического расположения мест прилипания того или иного газа и от коэффициента прилипания в этих местах. В защиту этого говорит разная качественная зависимость для газов разных типов — аргон прилипает с одинаковой вероятностью ( $\gamma = 1$ ) к любой панели второй ступени, а водород — только в определенных и довольно труднодоступных местах. Поэтому частице водорода трудно долететь до места возможного прилипания, но при этом, долетев и не прилипнув, она практически не может вылететь из насоса; причем хорошо заметно влияние намороженного слоя воды на относительную быстроту действия насоса по водороду — зависимость в отличие от аналогичной для аргона носит ярко нелинейный характер. В области, где на экране накоплено около 2 моль воды, видно явное изменение характера зависимости относительной быстроты действия по водороду в отличие от аргона, однако далее эти зависимости имеют похожий вид.

Видимо, это объясняется тем, что, когда на экране накоплено около 2 моль воды, геометрические характеристики насоса изменяются таким образом, что с учетом сложной геометрии мест прилипания водорода конфигурация насоса становится более выгодной с точки зрения откачки водорода, т. е. слой воды помогает прилипнуть молекулам водорода. Об этом говорят и более высокие значения относительной быстроты действия по водороду по сравнению со значениями ее по аргону.

Не нужно забывать, что относительная быстрота действия определяется для конкретного газа при конкретном коэффициенте прилипания. Поэтому кажущийся логич-



**Рис. 3.10.** Зависимости относительной быстроты действия насоса по аргону (1) и водороду (2) от количества накопленной на экране воды:

1 — коэффициент прилипания  $\gamma = 1$ ; 2 —  $\gamma = 0,58$

ным результат превышения быстроты действия по аргону соответствующего значения быстроты действия по водороду не получается. Это происходило бы, если бы эти зависимости строились по отношению к скорости действия насоса по аргону без замороженного слоя воды. Кроме того, необходимо отметить кажущийся парадоксальным результат превышения значений относительной скорости действия по водороду при коэффициенте прилипания  $\gamma = 0,58$  над ее значениями при  $\gamma = 1$ . Это также объясняется тем, что относительная скорость действия считается для каждого коэффициента прилипания отдельно, и поэтому поскольку при  $\gamma = 0,58$  непрелипших и, следовательно, пытающихся вылететь частиц больше, то и преграда в виде воды на экране при вылете частиц сказывается сильнее.

Здесь нужно отметить, что при влете частиц все случаи имеют одни и те же условия, и накопленная на экране вода, как геометрическая помеха влияет и на аргон, и на водород как при  $\gamma = 1$ , так и при  $\gamma = 0,58$  примерно одинаково. А вот при вылете частиц это может существенно сказаться — молекула может вернуться и прилипнуть.

**Зависимость скорости действия насоса от количества накопленного аргона.** Изучение зависимости скорости действия по водороду от количества накопленного аргона также проводилось с помощью цилиндрических поверхностей, имитирующих рост слоя. Результаты расчета приведены на рис. 3.11.

Расположение имитирующих поверхностей выбиралось в соответствии со структурой распределения аргона на поверхностях второй ступени.

Из результатов видно, что в начальный период накопления небольшой слой аргона играет позитивную роль — скорость действия увеличивается (хотя и незначительно). Когда слой достигает сущест-

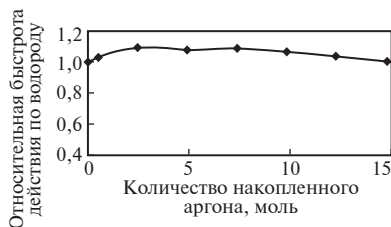


Рис. 3.11. Зависимость относительной скорости действия насоса по водороду от количества накопленного аргона

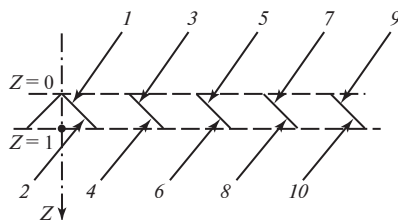


Рис. 3.12. Нумерация поверхностей экрана

венных размеров, он начинает препятствовать пролету частиц водорода к поверхностям с сорбентом и быстрота действия линейно уменьшается.

**Структура распределения частиц воды на экране крионасоса.** Для изучения структуры распределения частиц воды экран крионасоса был разделен на десять конических поверхностей (рис. 3.12). Каждая поверхность была поделена на 20 усеченных конусов плоскостями, перпендикулярными оси симметрии (показана на рис. 3.12 штрихпунктирной линией).

Число частиц, попавших на каждую из поверхностей, фиксировалось. Далее в результате несложных расчетов подсчитывалась удельная плотность частиц на данном участке экрана. Структура распределения замороженного слоя воды на поверхностях экрана показана на рис. 3.13. Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что самыми опасными с точки зрения скорости роста слоя воды являются соответственно поверхности 5, 1, 7 и 3. Хотя на поверхности 9 прилипает около 1,65 % числа всех влетевших в насос частиц, но расстояние от поверхности 9 до кожуха настолько велико, что щель между этой поверхностью и кожухом перекрывается в последнюю очередь.

**Структура распределения частиц аргона на поверхностях второй ступени.** Изучение структуры распределения аргона проводилось аналогично изучению распределения частиц воды. Схема расположения и нумерация поверхностей второй ступени представлены на рис. 3.14. Продольная координата  $Z$  выбирается так, как показано на рис. 3.12, но для каждой поверхности индивидуально.

Изучение распределения аргона важно потому, что при соприкосновении слоя аргона, выросшего на поверхности 11, с экраном создается тепловой мост, который выводит из равновесия систему и приводит к резким колебаниям температуры второй ступени. Это, в свою очередь, вызывает резкое снижение коэффициентов прилипания как по аргону, так и по водороду и соответственно снижение быстроты действия насоса. Таким образом, изучение и учет этого явления при конструировании необходимы. Структура замороженного слоя аргона на поверхностях второй ступени показана на рис. 3.15.



Рис. 3.13. Структура распределения замороженного слоя воды на поверхностях экрана

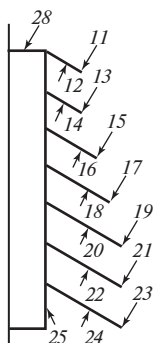


Рис. 3.14. Схема расположения и нумерация поверхностей второй ступени насоса

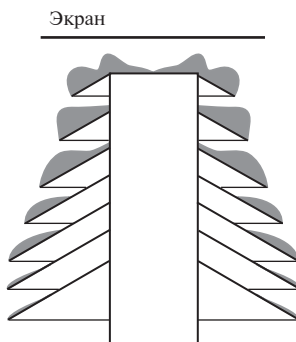


Рис. 3.15. Структура распределения замороженного слоя аргона на поверхностях второй ступени

По данным фирмы APD, для создания конденсатом теплового моста между первой и второй ступенями насоса необходимо накопить аргон в количестве  $V = 850$  л, т. е.

$$M = \frac{V}{V_{1 \text{ моля}}} = \frac{850}{22,4} = 37,9 \text{ моль}.$$

В результате моделирования  $M = 27,8$  моль. Эта разница объясняется тем, что программа, к сожалению, не учитывает попадание частиц в боковые поверхности слоя, как это происходит на самом деле, и поэтому модель представляет некий предельный случай, т.е. в действительности слой аргона растет несколько медленнее, поскольку он как бы «размыт» по отношению к модели. Однако подобное несоответствие не влияет на качественную оценку происходящих в насосе процессов и даже полезно с точки зрения анализа различных конструкций (возникает некий «запас прочности»).

Пример расчета альтернативной конструкции насоса на основе имеющейся модели

**Анализ недостатков конструкции крионасоса фирмы APD.** Исходя из представленных выше результатов моделирования можно отметить следующие недочеты в конструкции насоса фирмы APD:

- конструкция экрана не оптимизирована с точки зрения проводимости и максимального числа молекул воды, необходимого для полного перекрытия проводящих каналов;
- конструкция второй ступени также может быть улучшена с точки зрения захватной способности по любому газу и максимального количества аргона, необходимого для касания экрана.

Рассматриваемый метод хорош тем, что позволяет проанализировать, по крайней мере на качественном уровне, характеристики той или иной конструкции гораздо быстрее и дешевле стандартной методики (вначале — изготовить, затем — испытать).

**Возможные варианты конструкции экрана.** Нетрудно предположить, что для увеличения пропускной способности экрана нужно изменить угол наклона конических поверхностей, из которых он состоит. Так, при уменьшении угла между образующей конуса и осью симметрии экрана с  $45$  до  $22,5^\circ$  пропускная способность возрастает настолько, что коэффициенты захвата увеличиваются: по аргону на  $29,9$  и по водороду на  $29,2\%$ . Однако при этом возрастает нагрузка на поверхности  $11$  и  $28$  (см. рис. 3.14) со стороны аргона и воды, за счет чего практически в 2 раза снижается количество намороженного аргона, необходимого для касания экрана.

Чтобы этого избежать, была выбрана следующая конструкция экрана: углы наклона поверхностей  $1—4$  (см. рис. 3.12) остались прежними ( $45^\circ$ ), углы наклона поверхностей  $5, 6$  снизились с  $45$  до  $30^\circ$ , а поверхностей  $7—10$  — с  $45$  до  $22,5^\circ$ . Такая конструкция экрана позволяет предотвратить повышение нагрузки на поверхность  $11$  второй ступени и обеспечить высокую проводимость. Более того, для подобной конструкции увеличивается максимальное количество воды, необходимое для перекрытия проводящих каналов экрана, примерно с  $10$  до  $18,5$  моль. Это происходит из-за увеличения расстояния между поверхностями, образующими экран, а также из-за изменения картины распределения молекул воды по поверхностям экрана.

**Возможные варианты конструкции второй ступени насоса.** Несмотря на значительное уменьшение нагрузки частиц аргона на поверхности  $11$  и  $25$  (см. рис. 3.14), достичь адекватного увеличения количества аргона, необходимого для касания экрана, не удалось, более того, оно снизилось на  $5\%$ . Поэтому целесообразно убрать верхний конус (поверхности  $11$  и  $12$ ). Однако после снятия этой детали расчеты показали улучшение лишь на  $5\%$  по отношению к оригинальной конструкции фирмы APD; причем основное количество аргона находилось на месте пересечения боковой поверхности цилиндра, на котором крепятся конусы, и поверхности  $13$ . Таким образом, если в месте крепления конуса сделать круглую щель шириной  $4$  мм, т. е. закрепить конус не по всей его поверхности, а в четырех (или в трех) точках тонкими перемычками, можно добиться значительных улучшений. В результате расчетов новой конструкции насоса были получены хорошие показатели. Сравнительные данные по водороду для новой конструкции  $1$  и конструкции фирмы APD приведены на рис. 3.16.



**Рис. 3.16. Зависимости быстроты действия по водороду от количества накопленного водорода для оригинальной и новой конструкций крионасоса**

Что касается расчетов количества аргона, необходимого для касания экрана, то в новой конструкции оно увеличилось примерно на 70 %.

Однако снятие одной панели ведет к уменьшению площади поверхности, занимаемой сорбентом, и соответственно к снижению максимального количества накопленного водорода. Но эту проблему не трудно решить за счет увеличения площади покрытия поверхностей 17 и 19 (см. рис. 3.14) до границы прямой видимости из теплой зоны. Это обусловлено тем, что обычно в качестве сорбента используют активированный уголь, который имеет черный цвет.

Таким образом, чтобы значительно не увеличивать тепловые потери за счет излучения, в области прямой видимости поверхностей второй ступени из теплой зоны сорбент не наносится. В результате замена сорбирующих поверхностей даже несколько увеличивает площадь поверхности сорбента, что приводит к повышению максимального количества водорода, которое может захватить насос.

**Постановка задачи теплового расчета.** Тепловой расчет крионасосов разделяют на два этапа: определение тепловых нагрузок на криоповерхности и теплозащитный экран; вычисление расходов криоагентов или мощности криогенных устройств.

Тепловая нагрузка на криоповерхности складывается из величин, обусловленных тепловым излучением  $Q_{\text{изл}}$ , теплопроводностью твердых тел  $Q_{\text{тв}}$  (в нашем случае не учитывается), конденсацией  $Q_{\text{конд}}$ , криосорбцией  $Q_{\text{сорб}}$  и теплопроводностью газов  $Q_{\text{газ}}$ . В связи с этим для нормальной работы крионасоса должен выполняться следующий баланс:  $Q_{\text{изл}} + Q_{\text{конд}} + Q_{\text{сорб}} + Q_{\text{газ}} = Q_0$ , где  $Q_0$  — холодопроизводительность источника холода.

В расчете учитываются все составляющие этого уравнения применительно к рассматриваемым конструкциям, а также анализируются способы оптимизации в целях улучшения тепловых характеристик насоса.

**Теплопритоки излучением.** Для расчета теплопритоков излучением широко применяется метод угловых коэффициентов (см. гл. 2). Он заключается в нахождении коэффициентов, характеризующих долю теплового потока, падающего на холодную поверхность  $Q_{\text{пад}}$ , по отношению к потоку, излучаемому горячей поверхностью  $Q_{\text{изл}}$ , т.е.  $Q_{\text{пад}}^{1 \rightarrow 2} = Q_{\text{изл}}^1 \varphi_{1 \rightarrow 2}$ , где  $\varphi_{1 \rightarrow 2}$  — угловой коэффициент, характеризующий тепловой поток между поверхностями 1 и 2 и зависящий от геометрической формы, размеров поверхностей и их взаимного положения в пространстве. После расчета соответствующих угловых коэффициентов задача упростится и определить суммарный тепловой поток будет несложно.

Расчет угловых коэффициентов проводился с помощью программы. Алгоритм программы реализовал следующие допущения: при расчете рассеивания действует закон косинусного распределения; тепловой поток считается равномерно распределенным по излучающей поверхности.

При расчете угловых коэффициентов, характеризующих тепловой поток излучением от входного сечения ко второй ступени, для разных конструкций оказалось, что в новой конструкции этот тепловой поток примерно на 50 % больше ( $\varphi_{\text{в} \rightarrow \text{II}}^{\text{APD}} \approx 0,16$ ;  $\varphi_{\text{в} \rightarrow \text{II}}^{\text{нов}} \approx 0,24$ ). Подобное положение недопустимо, поскольку, выигрывая в быстродействии (около 30 %), существенно проигрываем в тепловых затратах.

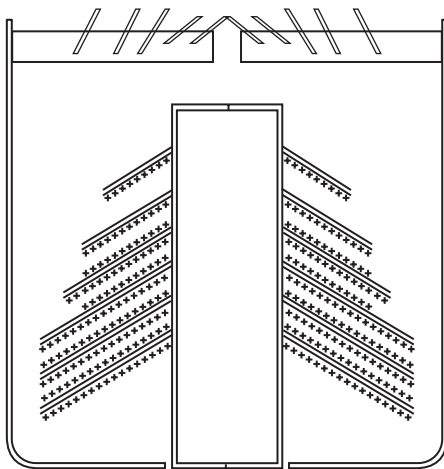


Рис. 3.17. Новая конструкция 2 крионасоса

В ходе работы было решено незначительно модернизировать конструкцию экрана, чтобы уменьшить поток от входного сечения ко второй ступени. Были сделаны следующие изменения: внешний конус (поверхности 9 и 10) сдвинули от оси симметрии на 3 мм; длину поверхностей 5—10 увеличили на 4 мм (рис. 3.17).

Для модернизированной конструкции крионасоса были получены угловые коэффициенты, приведенные в табл. 3.3.

При сравнении результатов видно, что удалось даже уменьшить теплопритоки от входного сечения ко второй ступени. При этом быстрота действия насоса по сравнению с быстротой действия конструкции фирмы APD увеличилась на 20 % по водороду и на 10 % по аргону. Максимальное количество воды, необходимое для перекрытия входного сечения, лишь незначительно уменьшилось по отношению к предыдущей альтернативной схеме, а максимальное количество аргона, необходимое для касания экрана, осталось прежним. Быстрота действия по водороду для разных конструкций представлена на рис. 3.18.

После расчета угловых коэффициентов не составляет труда вычислить тепловые потоки для всех поверхностей. Для этого можно воспользоваться известными формулами.

*Собственное излучение поверхности*  $Q_{\text{соб}} = \sigma \varepsilon F_{\text{пов}} T^4$ , где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $\varepsilon$  — степень черноты поверхности;  $F_{\text{пов}}$  — площадь поверхности;  $T$  — температура поверхности.

*Тепловой поток*, падающий на поверхность 2 с поверхности 1  $Q_{\text{пад}}^{1 \rightarrow 2} = Q_1 \varphi_{1 \rightarrow 2}$ , где  $Q_1$  — полный тепловой поток, излучаемый поверхностью 1;  $\varphi_{1 \rightarrow 2}$  — соответствующий угловой коэффициент.



Рис. 3.18. Быстрота действия по водороду для разных конструкций



Тепловой поток, поглощенный поверхностью 2:  $Q_{\text{погл}}^{1 \rightarrow 2} = Q_{\text{пад}}^{1 \rightarrow 2} \epsilon_2$ .

Результирующий тепловой поток на поверхность 2:  
 $Q_{\text{рез}}^{1 \rightarrow 2} = Q_{\text{погл}}^{1 \rightarrow 2} - Q_{\text{соб}}^2$ .

Таблица 3.3

**Угловые коэффициенты**

Коэффициент	Конструкция фирмы APD	Новая конструкция 2
$\Phi_{\text{в} \rightarrow \Pi}$	0,165188	0,149307
$\Phi_{\text{в} \rightarrow \text{э}}$	0,513496	0,624469
$\Phi_{\text{в} \rightarrow \text{к}}$	0,320022	0,224377
$\Phi_{\text{в} \rightarrow \text{д}}$	0,001294	0,001847
$\Phi_{\text{к} \rightarrow \Pi}$	0,660707	0,657343
$\Phi_{\text{к} \rightarrow \text{э}}$	0,072692	0,099624
$\Phi_{\text{к} \rightarrow \text{д}}$	0,086837	0,082032
$\Phi_{\text{д} \rightarrow \Pi}$	0,725611	0,725157
$\Phi_{\text{д} \rightarrow \text{к}}$	0,272116	0,272570
$\Phi_{\text{д} \rightarrow \text{э}}$	0,000364	0,000546
$\Phi_{\text{э} \rightarrow \Pi}$	0,496279	0,454681
$\Phi_{\text{э} \rightarrow \text{к}}$	0,503155	0,544648
$\Phi_{\text{э} \rightarrow \text{д}}$	0,000566	0,000671

Примечание. Индексы означают: «в» — входное сечение; «э» — экран первой ступени; «к» — кожух первой ступени; «д» — дно первой ступени; «П» — вторая ступень.

Для оценочных расчетов были использованы следующие коэффициенты излучения:

$$\epsilon_1^{\text{полир}} = 0,1; \epsilon_1^{\text{черн}} = 0,95; \epsilon_{\Pi}^{\text{полир}} = 0,05; \epsilon_{\Pi}^{\text{уголь}} = 0,6,$$

где нижние индексы указывают номер ступени, а верхние — характер поверхности.

Расчеты проводились с помощью программы, при этом учитывались как прямое, так и отраженное излучения. В результате получены следующие значения тепловых потоков:

$$Q_1^{\text{APD}} = 1,33042 \text{ Вт}; \quad Q_{\Pi}^{\text{APD}} = 8,172203 \cdot 10^{-2} \text{ Вт};$$

$$Q_1^{\text{нов2}} = 1,014351 \text{ Вт}; \quad Q_{\Pi}^{\text{нов2}} = 7,240793 \cdot 10^{-2} \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{изл}}^{\text{APD}} = 1,412142 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{изл}}^{\text{нов2}} = 1,086759 \text{ Вт}.$$

**Теплота, выделяемая при конденсации.** Эта теплота пропорциональна числу молей конденсирующегося газа, соударяющихся с поверхностью площадью  $F_{\text{пов}}$  в течение 1 с. Следовательно, теплота, выделяемая при конденсации, пропорциональна скорости действия насоса. Поэтому повышение скорости действия неминуемо приводит к увеличению тепловых потерь.

Для расчета теплоты, выделяемой при конденсации, воспользуемся формулой, предложенной в [7]:

$$Q_{\text{конд}} = \frac{S_n p \Delta H}{RT_{0,c}}.$$

Здесь  $S_n$  — скорость действия;  $p$  — давление газа (в нашем случае  $p = 0,133$  Па);  $\Delta H$  — теплота фазового перехода; причем считается, что все падающие частицы конденсируются и затем уже не испаряются.

Расчеты для частиц аргона в начальный момент времени, когда он еще не накоплен, дали следующие результаты:

$$Q_{\text{конд}}^{\text{APD}} = 0,551 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{конд}}^{\text{нов2}} = 0,608 \text{ Вт}.$$

**Теплота адсорбции.** Теплота адсорбции, как и теплота, выделяемая при конденсации, пропорциональна скорости действия. Однако в отличие от теплоты, выделяемой при конденсации, она значительно меняется (уменьшается) в процессе откачки, так как коэффициент захвата насоса по водороду зависит от степени заполнения сорбента. Для расчета воспользуемся формулой [7]

$$Q_{\text{сорб}} = \frac{S_n p}{RT_{0,c}} \left[ \alpha \{ \Delta H + \Delta H_a - \Delta H_c \} + (1 - \alpha) \Delta H \right].$$

Здесь  $\Delta H_a$  — теплота адсорбции водорода в расчете на 1 моль;  $\Delta H_c$  — теплота сублимации в расчете на 1 моль;  $\alpha$  — доля адсорбированных частиц. В данной формуле считается, что частицы с холодной поверхности не испаряются.

Расчеты дали следующие результаты:

$$Q_{\text{сорб}}^{\text{APD}} = 0,190 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{сорб}}^{\text{нов2}} = 0,228 \text{ Вт}.$$

**Теплопритоки через слой разреженного газа.** При расчете теплопритоков через слой разреженного газа воспользуемся системой моментных уравнений для случая свободномолекулярного течения:

$$\rho_1 \sqrt{\frac{RT_1}{2\pi}} - \rho_2 \sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = 0;$$

$$\frac{1}{2}\rho_1 RT_1 + \frac{1}{2}\rho_2 RT_2 = p;$$

$$2RT_1 \rho_1 \sqrt{\frac{RT_1}{2\pi}} - 2RT_2 \rho_2 \sqrt{\frac{RT_2}{2\pi}} = q.$$

В результате аналитического решения получим формулу для расчета плотности теплового потока через разреженный газ:

$$q = 4p \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \left( \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} \right).$$

В нашем случае  $T_1 = T_r$ ,  $T_2 = T_x$ ,  $p = 0,133$  Па. Задача осложняется тем, что в действительности в насосе находится смесь трех газов: паров воды, аргона и водорода. В табл. 3.4 даны результаты расчетов плотностей тепловых потоков через разреженный газ для разных концентраций. Из таблицы видно, что максимальные теплопритоки ко второй ступени возникают при откачке чистого водорода.

Таблица 3.4

Результаты расчетов плотностей тепловых потоков

Концентрация газа			$q$ , Вт/м <sup>2</sup>	Концентрация газа			$q$ , Вт/м <sup>2</sup>
Ar	H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O		Ar	H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	
0	0	1	18,39	0,3	0,3	0,4	17,54
0	0,1	0,9	19,27	0,3	0,4	0,3	18,29
0	0,2	0,8	20,29	0,3	0,5	0,2	19,15
0	0,3	0,7	21,48	0,3	0,6	0,1	20,15
0	0,4	0,6	22,91	0,3	0,7	0	21,32
0	0,5	0,5	24,68	0,4	0	0,6	15,07
0	0,6	0,4	26,93	0,4	0,1	0,5	15,55
0	0,7	0,3	29,93	0,4	0,2	0,4	16,06
0	0,8	0,2	34,22	0,4	0,3	0,3	16,64
0	0,9	0,1	41,13	0,4	0,4	0,2	17,28
0	1	0	55,18	0,4	0,5	0,1	18
0,1	0	0,9	17,36	0,4	0,6	0	18,82
0,1	0,1	0,8	18,1	0,5	0	0,5	14,49
0,1	0,2	0,7	18,93	0,5	0,1	0,4	14,91
0,1	0,3	0,6	19,89	0,5	0,2	0,3	15,36
0,1	0,4	0,5	21,01	0,5	0,3	0,2	15,86

Концентрация газа			$q$ , Вт/м <sup>2</sup>	Концентрация газа			$q$ , Вт/м <sup>2</sup>
Ar	H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O		Ar	H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	
0,1	0,5	0,4	22,34	0,5	0,4	0,1	16,42
0,1	0,6	0,3	23,97	0,5	0,5	0	17,03
0,1	0,7	0,2	26,01	0,6	0	0,4	13,97
0,1	0,8	0,1	28,69	0,6	0,1	0,3	14,34
0,1	0,9	0	32,4	0,6	0,2	0,2	14,75
0,2	0	0,8	16,49	0,6	0,3	0,1	15,19
0,2	0,1	0,7	17,11	0,6	0,4	0	15,67
0,2	0,2	0,6	17,81	0,7	0	0,3	13,5
0,2	0,3	0,5	18,6	0,7	0,1	0,2	13,84
0,2	0,4	0,4	19,51	0,7	0,2	0,1	14,2
0,2	0,5	0,3	20,57	0,7	0,3	0	14,59
0,2	0,6	0,2	21,81	0,8	0	0,2	13,08
0,2	0,7	0,1	23,32	0,8	0,1	0,1	13,38
0,2	0,8	0	25,19	0,8	0,2	0	13,71
0,3	0	0,7	15,73	0,9	0	0,1	12,69
0,3	0,1	0,6	16,27	0,9	0,1	0	12,97
0,3	0,2	0,5	16,87	1	0	0	12,34

Для общих расчетов возьмем среднее значение плотности теплового потока через разреженный газ:  $q_{\text{ср}} = 19,523485$  Вт/м<sup>2</sup>. Таким образом, значения теплового потока ко второй ступени для разных конструкций составляют:

$$Q_{\text{газ}}^{\text{APD}} = 4,9793 \text{ Вт}; Q_{\text{газ}}^{\text{нов}} = 4,7341 \text{ Вт}.$$

**Влияние щели в поверхности второй ступени на ухудшение свойств теплового моста.** Появление щели в верхней поверхности второй ступени несомненно приведет к резкому ухудшению эффективности работы этой поверхности. Если соединить конус с цилиндром простыми тонкими перемычками, обеспечивающими необходимую прочность, то задача все равно не будет решена, так как площадь поверхности теплообмена между конусом и цилиндром уменьшится по сравнению с конструкцией фирмы APD.

Допустим, что верхний конус второй ступени конструкции фирмы APD состоит из двух частей: большого конуса, такого же, как и в конструкции с щелью, и малого конуса, соединяющего большой конус с цилиндром и являющегося фактически тепловым мостом. Таким образом, при прочих равных условиях эффективность захлаживания

верхней панели зависит от площади поверхности теплообмена между тепловым мостом и конусом. Легко определить, что площадь поверхности теплообмена для конструкции фирмы APD

$$F^{APD} = 2\pi R_{щ} \delta = 2\pi \cdot 0,03 \cdot 0,001 = 1,885 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

где  $R_{щ}$  — радиус щели.

Поэтому связывать рабочую поверхность верхней панели с цилиндром нужно перемычками, обеспечивающими не только приемлемую прочность, но и необходимый для нормальной работы тепловой контакт. Одна из конструкций такой перемычки представлена на рис. 3.19.

Поверхность теплообмена состоит из трапеции высотой 4,36427 мм с основаниями 4 и 12 мм и прямоугольника со сторонами 4 и 1 мм (в торцевой части конуса). Таким образом, площадь этой поверхности равна произведению числа перемычек  $n$  на площадь поверхности теплообмена, обеспечиваемую одной перемычкой:

$$F_{\text{нов2}}^{\text{тр}} = h \frac{a+b}{2} = 4,36427 \cdot \frac{4+12}{2} = 34,9 \text{ мм}^2 = 34,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$F_{\text{нов2}}^{\text{пр}} = ab = 1 \cdot 4 = 4 \text{ мм}^2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$F_{\text{нов2}} = (F_{\text{нов2}}^{\text{тр}} + F_{\text{нов2}}^{\text{пр}})n = (34,9 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6}) \cdot 8 = 3,113 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Из расчетов видно, что перемычки обеспечивают увеличение поверхности теплообмена на 65 %, что еще не означает адекватное увеличение эффективности, поскольку в расчетах не учитываются потери потока при прохождении шва, соединяющего конус и перемычку.

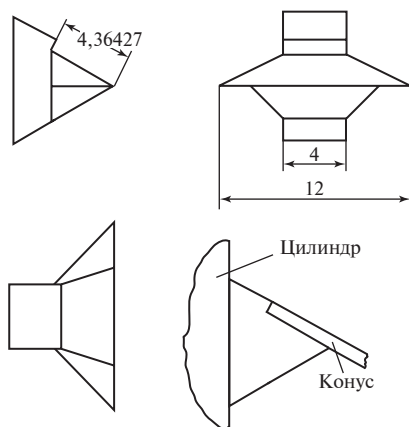


Рис. 3.19. Конструкция перемычки второй ступени насоса

Надо сказать, что восемь перемычек, каждая из которых имеет ширину 4 мм, перекрывают лишь 15 % щели, что практически не сказывается на ее работе.

Таким образом, можно констатировать, что предлагаемый метод соединения конуса и цилиндра верхней поверхности не ухудшит (а возможно, и улучшит) их тепловой контакт.

**Итоги теплового расчета.** Суммарный тепловой поток для конструкции фирмы APD

$$Q^{\text{APD}} = Q_{\text{изл}}^{\text{APD}} + Q_{\text{конд}}^{\text{APD}} + Q_{\text{сорб}}^{\text{APD}} + Q_{\text{газ}}^{\text{APD}} = \\ = 1,412142 + 0,551 + 0,19 + 4,9793 = 7,132442 \text{ Вт.}$$

Для новой конструкции 2

$$Q^{\text{нов2}} = Q_{\text{изл}}^{\text{нов2}} + Q_{\text{конд}}^{\text{нов2}} + Q_{\text{сорб}}^{\text{нов2}} + Q_{\text{газ}}^{\text{нов2}} = \\ = 1,086759 + 0,608 + 0,228 + 4,7341 = 6,656859 \text{ Вт.}$$

Таким образом, полученная конструкция превосходит оригинальную не только по вакуумным, но и по тепловым характеристикам.

Можно сделать следующие выводы:

- описанная компьютерная модель позволяет с удовлетворительной точностью выполнить расчеты вакуумной и тепловой систем имеющейся типовой конструкции крионасоса;
- можно использовать данную модель для оценки характера зависимости одного из важнейших параметров насоса — быстроты действия — от различных показателей;
- полученные результаты говорят также о возможном применении данной модели для расчета новых конструкций крионасосов и оценки их характеристик;
- вполне реальна не только качественная оценка, но и количественная, поскольку было показано, что можно подобрать параметры модели таким образом, что результаты расчетов станут весьма близки к экспериментальным;
- возможность варьирования множества параметров и получения большого числа результатов, позволяющих судить о работе насоса (быстроте действия, распределении замороженного слоя и др.), позволяет говорить о перспективе применения модели для оптимизации конструкции насоса, пример которой был приведен.

### 3.3.3. Комплексное исследование системы откачки продуктов термоядерного синтеза ITER

В процессе разработки и проектирования современных ресурсоемких вакуумных систем, таких как система откачки продуктов термоядерного синтеза, большое значение приобретает предварительный анализ проектируемой системы. Исчерпывающие экспериментальные исследования на стадии проектирования затруднены по причине большой ресурсоемкости при изготовлении такой системы, поэтому в качестве методов предварительного анализа представляется возможным применение расчетных методик.

Подобный анализ необходим, чтобы на наиболее ранней стадии проектирования выделить самые ответственные части конструкции и те из них, для которых нужно проводить более подробные исследования и которые необходимо подвергать максимальной оптимизации.

Проведем комплексный анализ системы откачки продуктов термоядерного синтеза ITER. В качестве основных методов исследования используем метод Монте-Карло пробной частицы (см. гл. 1) и аналитические методики [1]. Под комплексным анализом понимается анализ как вакуумных, так и тепловых характеристик системы откачки.

**Конструкция системы откачки.** Общая схема системы откачки продуктов термоядерного синтеза ITER показана на рис. 3.20. Система откачки представляет собой диверторный трубопровод, внутри которого установлен крионасос.

Крионасос состоит из цилиндрического кожуха, внутри которого закреплен цилиндрический защитный щит, который охлаждается до 80 К. Входное сечение насоса открывается и закрывается посредством клапана, укрепленного на поршне и обеспечивающего как регулировку скорости действия насоса, так и начало и конец процесса откачки. Кроме цилиндрического щита насос имеет защитный экран, состоящий из конусов, охлажденных также до 80 К.

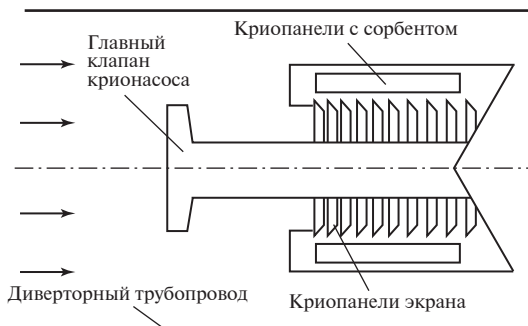


Рис. 3.20. Схема системы откачки продуктов термоядерного синтеза в ITER

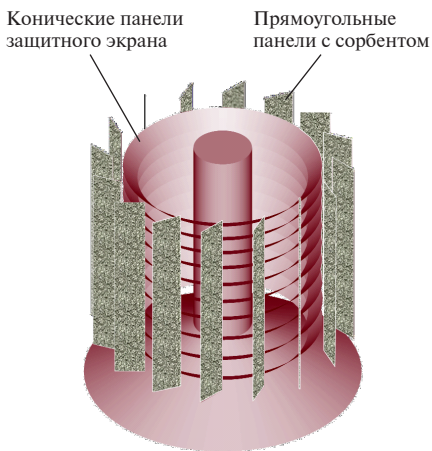


Рис. 3.21. Внутренняя структура крионасоса ITER

Внутренняя структура крионасоса показана на рис. 3.21. Поверхности (панели) с нанесенным сорбентом имеют прямоугольную форму и охлаждаются до 5 К. От взаимодействия входного теплового потока они полностью защищены цилиндрическим щитом и коническим защитным экраном.

Были проанализированы как система откачки в целом, так и крионасос. При анализе системы откачки контрольное сечение находилось на входе в диверторный трубопровод и учитывалась полная конфигу-

рация системы вместе с главным клапаном крионасоса.

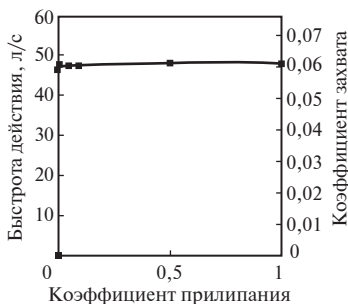
При анализе крионасоса контрольное сечение располагалось на входе в крионасос, крышка главного клапана не учитывалась, однако в анализируемую конфигурацию входил фрагмент поршня главного клапана, который находится внутри насоса.

Коэффициенты прилипания газа на всех криопанелях с сорбентом принимались равными и изменялись от 0 до 1. На всех прочих стенках системы коэффициенты прилипания считались нулевыми. Значения скорости действия рассчитывались для гелия.

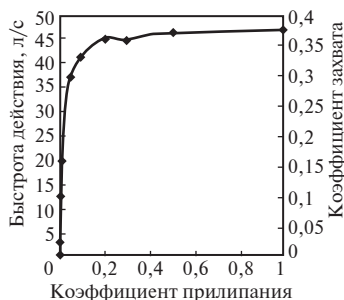
**Расчеты скорости действия.** Результаты анализа изменения скорости действия системы откачки в целом и крионасоса в зависимости от коэффициентов прилипания газа на панелях с сорбентом показаны на рис. 3.22 и 3.23 соответственно.

Значения коэффициента захвата крионасоса изменяются от 0,025 (для коэффициента прилипания на криопанелях с сорбентом, равного 0,001) до 0,38 (для коэффициента прилипания, равного 1). В системе откачки в целом коэффициенты захвата значительно снижаются, так как появляется множество факторов, препятствующих попаданию частиц к криопанелям с сорбентом. Влетая внутрь системы, частицы испытывают сопротивление со стороны диверторного трубопровода и главного клапана крионасоса. При этом значения коэффициентов захвата для системы откачки в целом меняются слабо при таком же изменении коэффициентов прилипания на криопанелях с сорбентом — от 0,058 (при коэффициенте прилипания 0,001) до 0,062 (при коэффициенте прилипания 1).





**Рис. 3.22.** Зависимость быстроты действия и коэффициента захвата системы откачки от коэффициентов прилипания газа на криопанелях насоса



**Рис. 3.23.** Зависимость быстроты действия и коэффициента захвата крионасоса от коэффициентов прилипания

Это говорит о том, что в системе откачки в целом частицам изначально очень трудно достигнуть панелей с сорбентом — доля долетающих до панелей частиц мала и составляет около 6 %. Однако если частица все же долетает до криопанелей с сорбентом, то ей трудно вылететь назад, и, несмотря на малый коэффициент прилипания, существует высокая вероятность захвата частицы.

Необходимо отметить, что предполагаемая проектировщиками быстрота действия вышеописанной системы откачки составляет  $41,5 \text{ м}^3/\text{с}$ , что на 10—20 % ниже полученных в результате анализа значений. Это расхождение можно объяснить различием характеристик потока на входе в систему откачки для реальной установки и для моделируемой системы.

**Расчет теплопритоков через слой разреженного газа.** Основными факторами, влияющими на температурный режим работы системы, являются теплопритоки излучением и от панелей экрана к криопанелям с сорбентом через разреженный газ. Теплопритоки теплопередачей через компоненты системы, а также вызванные процессами конденсации и сорбции не будем рассматривать, так как эти факторы регулируются оптимизацией тепловой изоляции и задаваемым режимом работы.

Выбор конфигурации системы влияет именно на защиту от теплопритоков излучением и через разреженный газ. Результаты расчетов теплопритоков по разреженному газу на криопанели с сорбентом для разных давлений показаны на рис. 3.24.

Подобный расчет необходим, так как главным условием работы как системы, так и крионасоса является поддержание температурного режима криопанелей с сорбентом, поскольку именно на них происходит сорбция откачиваемого газа.

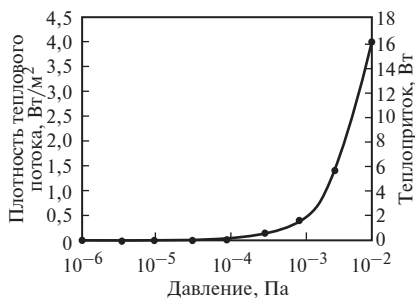


Рис. 3.24. Теплопритоки через слой разреженного газа от панелей экрана к криопанелям с сорбентом

Из представленной зависимости видно, что теплоприток экспоненциально падает с уменьшением давления внутри системы и при давлениях ниже  $10^{-4}$  Па составляет доли ватта.

**Расчет теплопритоков излучением.** Результаты анализа теплопритоков излучением к криопанелям с сорбентом от поверхностей, их окружающих, — защитных экранов показаны в табл. 3.5 и на рис. 3.25. Излучение от входного сечения на криопанели с сорбентом отсутствует.

Из проведенного анализа видно, что для данной конфигурации системы откачки значения теплового потока излучением к криопанелям с сорбентом может достигать 23 Вт.

Таблица 3.6

Значения теплового потока излучением от защитных экранов (температура 80 К, эмиссивность  $e_1$ ) к криопанелям с сорбентом (температура 5 К, эмиссивность  $e_2$ ), Вт, при разных значениях эмиссивности

$e_1$	$e_2$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,1	0,747216	1,193733	1,490659	1,702382	1,860975	1,984206	2,082716	2,163266	2,230358	2,287103
0,2	0,893109	1,615271	2,211279	2,711534	3,137396	3,504311	3,823725	4,104302	4,352719	4,574206
0,3	0,955282	1,830768	2,636056	3,379263	4,067301	4,706094	5,300745	5,855678	6,374744	6,861309
0,4	0,989731	1,96162	2,916145	3,853767	4,774931	5,680067	6,569589	7,443898	8,303382	9,148412
0,5	1,01162	2,049513	3,114714	4,208318	5,331474	6,485398	7,671371	8,890747	10,14496	11,43552
0,6	1,026758	2,112618	3,262832	4,483297	5,780651	7,162397	8,637046	10,21429	11,90523	13,72262
0,7	1,037852	2,160125	3,377558	4,702788	6,150797	7,739476	9,490369	11,42966	13,58948	16,00972
0,8	1,046331	2,197183	3,469041	4,882048	6,461084	8,237235	10,24987	12,54958	15,20252	18,29682
0,9	1,053022	2,226896	3,543694	5,03121	6,724945	8,670976	10,93021	13,58489	16,74877	20,58393
1	1,058436	2,251251	3,60577	5,157266	6,952075	9,052305	11,54316	14,54481	18,2323	22,87103

Был проведен комплексный анализ системы откачки продуктов термоядерного синтеза ITER. Все расчеты умышленно осуществлялись для широкого диапазона значений параметров системы.

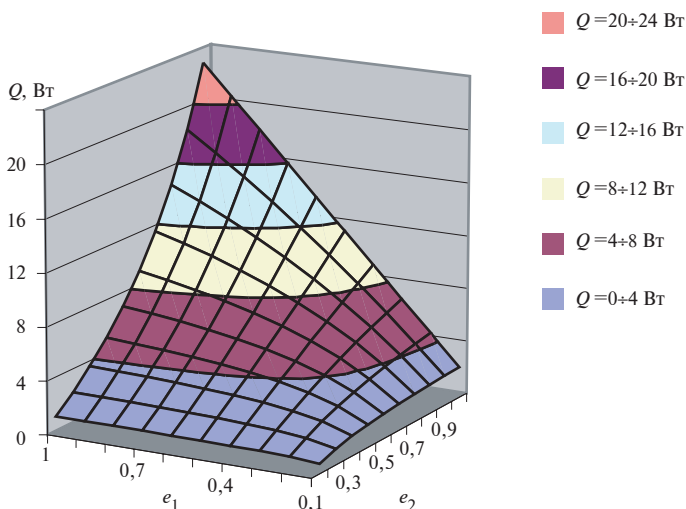


Рис. 3.25. Значения теплового потока излучением от защитных экранов (температура 80 К, эмиссивность  $e_1$ ) к криопанелям с сорбентом (температура 5 К, эмиссивность  $e_2$ ) в зависимости от эмиссивности

Полученные в результате анализа значения быстроты действия имеют расхождения, равные 10—20 %, со значениями быстроты действия, предполагаемыми проектировщиками системы откачки вышеописанной конфигурации (41,5 м<sup>3</sup>/с). Эти расхождения можно объяснить различиями характеристик потока на входе в систему откачки для реальной установки и для моделируемой системы.

Необходимо отметить, что система откачки в целом имеет стабильное значение быстроты действия для широкого диапазона коэффициентов прилипания, поэтому можно сделать вывод, что сорбент для системы следует выбирать исходя, в первую очередь, из емкостных характеристик, поскольку, как видно из расчетов, коэффициент прилипания незначительно влияет на эффективность системы.

Также следует основное внимание обращать на степень черноты поверхностей системы и, пользуясь результатами анализа (табл. 3.5), можно выбрать наиболее оптимальный вариант.

В зависимости от режима работы системы, зная возможные давления в ней, можно предположить значения теплопритоков через слой разреженного газа.

Вышеприведенный анализ позволяет определить наиболее ответственные с точки зрения проектирования участки системы и провести как численный, так и экспериментальный детальные анализы этих участков в целях возможной их оптимизации.

### 3.4. АНАЛИЗ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ КАМЕР ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОТКАЧНЫХ СИСТЕМ

Для измерения скорости действия криогенных насосов используются стандартные экспериментальные методы. Однако условия измерений не соответствуют идеальным (предполагаемым при расчетах — присоединение к бесконечно большому объему) на входе в крионасос, что может вносить погрешности в результаты этих измерений.

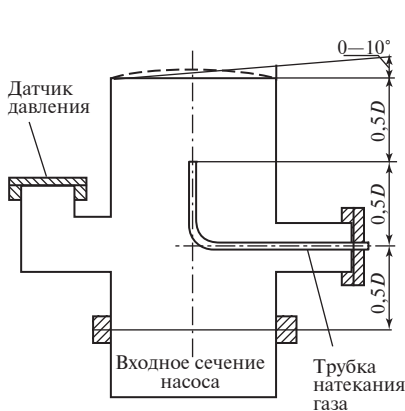
Кроме того, экспериментальный метод основывается не на прямом получении значения скорости действия насоса, а на измерении давления в определенной точке испытательной камеры. Далее, в соответствии с найденным значением давления определяется скорость действия.

Поэтому при сравнении расчетной и экспериментальной методик необходимо обратить внимание на два фактора:

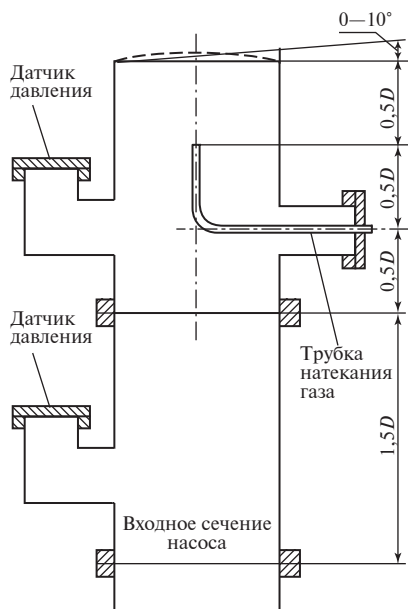
- на изменения, которые могут вносить стандартные экспериментальные испытательные камеры в условия на входе в крионасос, и насколько сильно эти изменения влияют на получаемое значение скорости действия насоса;
- на влияние позиции датчика, измеряющего давление внутри испытательной камеры, на значение скорости действия анализируемого насоса и достоверность этого значения по сравнению с рассчитанным для условий присоединения к большому объему.

Методом Монте-Карло пробной частицы моделировались условия на входе в крионасос с учетом изменений, которые могут вносить компоненты измерительной системы. Также расчетным способом анализировались распределение давления внутри испытательной камеры и влияние позиции датчика на результаты измерения. Кроме того, определялись значения скорости действия крионасоса Marathon-8 с учетом элементов измерительной системы, которые сравнивались с полученными по идеальной схеме присоединения к бесконечно большому объему значениями.

**Анализируемые структуры.** Исследовались два типа стандартных испытательных камер: одноколпаковая камера с одним датчиком давления (рис. 3.26) и камера с двумя датчиками [2], разделенными диафрагмой (рис. 3.27). В качестве насоса использовались две структуры. Первая из них — «пористый насос» — представляет собой плоскую поверхность с задаваемым равномерно распределенным по ней коэффициентом захвата. В качестве второй анализируемой структуры применялся крионасос Marathon-8 (см. рис. 3.26) производства IGC-APD Cryogenics Inc., используемый для откачки смеси газов, состоящей, например, из аргона, водорода и воды. При расчетах рассматривался вариант откачки одного газа — аргона. Для сравнения использовались результаты расчетов аналогичных структур при условии присоединения к бесконечно большому объему.



**Рис. 3.26. Схема одноколпаковой испытательной камеры**



→  
**Рис. 3.27. Схема испытательной камеры с двумя датчиками давления**

**Метод расчета.** Все расчеты проводились методом Монте-Карло пробной частицы. Кроме того, распределение давления внутри испытательной камеры определялось по специальным алгоритмам.

В расчетах были приняты следующие допущения:

- все частицы движутся независимо друг от друга и не сталкиваются между собой;
- частицы сталкиваются только со стенками анализируемой структуры, и при столкновении отражение частиц подчиняется диффузному закону;
- условие присоединения к большому объему означает, что частицы равномерно распределены по поверхности плоскости присоединения, и имеют траектории влета в соответствии с косинусным законом распределения — как будто частица отражается от этой мнимой плоскости по диффузному закону;
- для анализируемого газа справедливы те же законы, что и для идеального.

В качестве анализируемого газа использовался аргон при температуре 293 К. В расчетах принималась средняя скорость  $v_{\text{ср}} = 392,6$  м/с, одинаковая и постоянная для всех частиц.

**Анализ характеристик потока на выходе из испытательной камеры.** Анализ этих характеристик проводился при условии присоединения трубки напуска газа к бесконечно большому объему, т.е. считалось, что на входе в трубку напуска частицы равномерно распределяются по сечению трубки, и как на входе, так и при отражении от поверхностей камеры они имеют косинусное угловое распределение.

Полученные в результате расчетов диаграммы направлений движения частиц на выходе из одноколпаковой и двухдатчиковой испытательных камер показаны на рис. 3.28, 3.29. Характер данных диаграмм качественно отличается от структуры диффузного углового распределения частиц на входе в крионасос, которое принимается для условия присоединения насоса к бесконечно большому объему. Это распределение на данных диаграммах представляло бы собой окружность.

Распределения концентрации частиц на выходе из испытательной камеры с учетом изменений, вносимых компонентами измерительных систем одноколпакового и двухдатчикового методов, показаны на рис. 3.30, 3.31. При условии присоединения к бесконечно большому

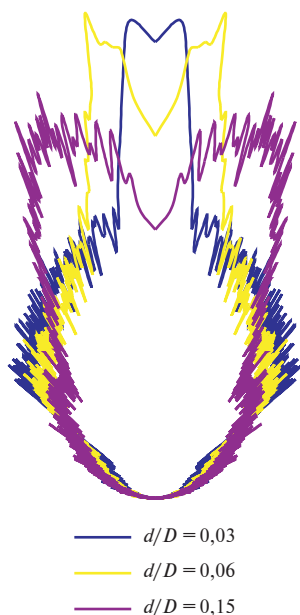


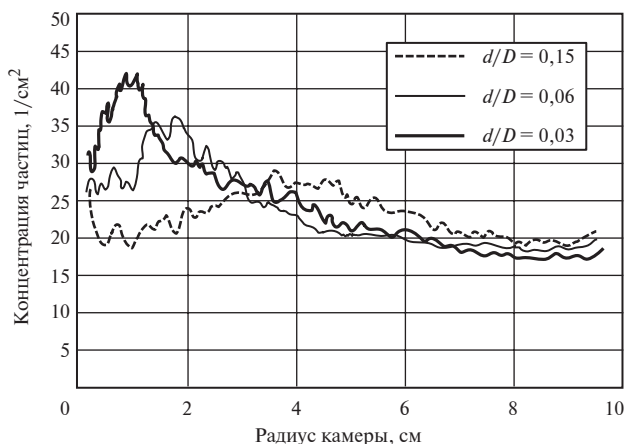
Рис. 3.28. Диаграмма направлений движения частиц на выходе из одноколпаковой испытательной камеры для разных соотношений диаметров трубки напуска  $d$  и камеры  $D$



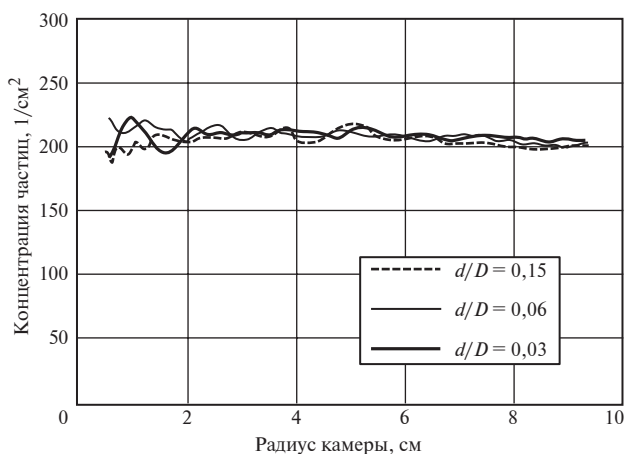
Рис. 3.29. Диаграмма направлений движения частиц на выходе из двухдатчиковой испытательной камеры для разных соотношений диаметров диафрагмы  $d$  и камеры  $D$

объему это распределение является равномерным. С учетом изменений, вносимых измерительной системой, характер распределения может существенно (в 2 раза) отличаться от равномерного.

Данные диаграммы не зависят от типа газа, так как определяются только геометрическими характеристиками испытательной камеры, с которой происходит взаимодействие потока газа. Поэтому диаграммы будут иметь аналогичную структуру и для водорода, и для воды, и др.



**Рис. 3.30.** Распределение концентрации частиц на выходе из одноколпаковой испытательной камеры для разных соотношений диаметров трубки напуска  $d$  и камеры  $D$



**Рис. 3.31.** Распределение концентрации частиц на выходе из двухдатчиковой испытательной камеры для разных соотношений диаметров диафрагмы  $d$  и камеры  $D$

Таким образом, можно сделать вывод, что характеристики потока на выходе из различных испытательных камер сильно отличаются от его характеристик при условии присоединения к бесконечно большому объему и друг от друга.

**Анализ распределения давления внутри испытательных камер.** При работе испытательных камер быстрота действия насосов определяется не напрямую, а через давление внутри испытательной камеры. Датчик давления располагается на расстоянии  $0,5D$  от выходного сечения камеры (для двухдатчиковой камеры верхний датчик находится на расстоянии  $0,5D$  от сечения диафрагмы). Это расстояние выбрано в соответствии с результатами проведенных ранее исследований [2]. Фишер и Моммсен [2] показали, что при условиях присоединения к испытательной камере «пористого» насоса с равномерно распределенным по поверхности коэффициентом захвата датчик, установленный на расстоянии  $0,5D$  от выходного сечения камеры, будет показывать давление, соответствующее условиям откачки из бесконечно большого объема. На рис. 3.32, 3.33 приведены функции  $f(X, \sigma)$ , характеризующие распределение давления по длине испытательных камер разных типов. Здесь  $X$  — продольная координата, выраженная в долях радиуса (от 0 до 3),  $\sigma$  — коэффициент захвата.

Таким образом, можно сделать вывод, что для условий присоединения «пористого» насоса, т.е. равномерно распределенного по входному сечению коэффициента захвата, выбор позиции датчика обоснован и соответствует условиям откачки из большого объема.

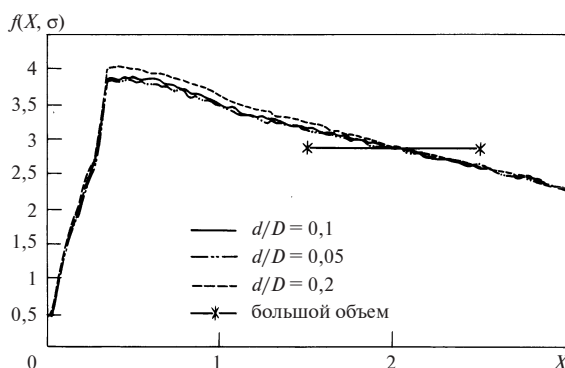


Рис. 3.32. Распределение давления внутри одноколпаковой испытательной камеры с присоединенным «пористым» насосом для разных соотношений диаметров трубки напуска  $d$  и камеры  $D$



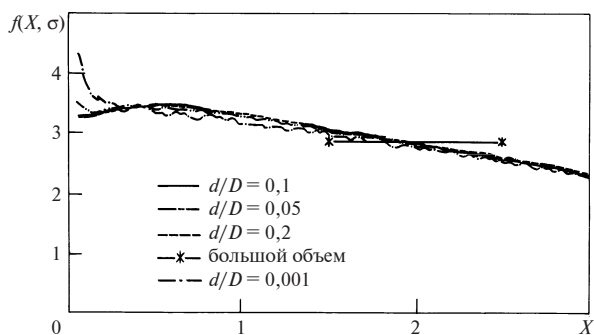


Рис. 3.33. Распределение давления внутри двухдатчиковой испытательной камеры с присоединенным «пористым» насосом для разных соотношений диаметров диафрагмы  $d$  и камеры  $D$

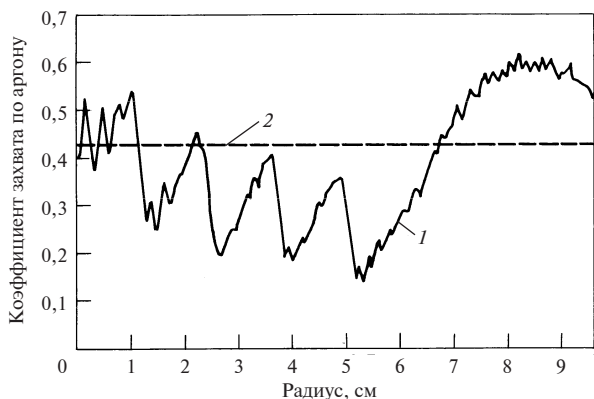


Рис. 3.34. Распределения коэффициента захвата по входным сечениям насосов Marathon-8 (1) и «пористого» (2)

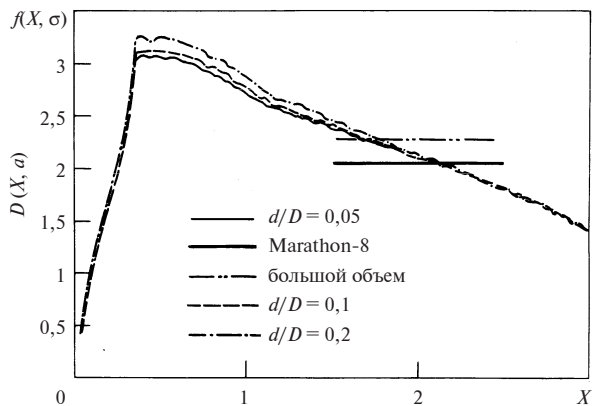


Рис. 3.35. Распределение давления внутри одноколпачковой испытательной камеры с присоединенным насосом Marathon-8

Однако реальный насос может иметь распределение коэффициента захвата по входному сечению, которое будет существенно отличаться от равномерного. На рис. 3.34 представлено распределение коэффициента захвата по входному сечению крионасоса Marathon-8. Оно существенно отличается от равномерного, характерного для входного сечения «пористого» насоса.

На рис. 3.35 показано распределение давления внутри одноколпачковой испытательной камеры в случае присоединения к ней реального насоса Marathon-8. Из рисунка видно, что давление в позиции датчика соответствует условиям откачки из испытательной камеры (на рисунке значения для Marathon-8). Однако при этом коэффициент захвата насоса равен 0,49. А в условиях присоединения к большому объему насос имеет коэффициент захвата 0,43. Таким образом, можно сделать вывод, что результаты расчета быстроты действия насоса через давление, показанное датчиком, будут соответствовать реальной скорости действия насоса в условиях присоединения его к камере. Однако из-за существенных отличий условий присоединения к камере от условий присоединения к большому объему быстрота действия насоса может различаться на 10—15 %. При ответственных расчетах необходимо учитывать возможную разницу между значениями быстроты действия для условий присоединения к испытательным камерам и к большому объему.

## Глава 4

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ АНАЛИЗА ЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНЫХ ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ

### 4.1. РАСЧЕТ ПРОФИЛЕЙ КРИОСЛОЕВ

В настоящее время разрабатываются качественно новые вакуумные системы, основанные на использовании явлений криоконденсации, криосорбции, криозахвата и обеспечивающие высокий и сверхвысокий вакуум. Потребность в высоковакуумных насосах постоянно растет, с одной стороны, из-за появления новых областей применения, а с другой — из-за того, что для многих процессов, осуществляемых в вакууме, предъявляются повышенные требования к чистоте свободной от углеводородов атмосферы остаточных газов, низкому остаточному давлению и с учетом возможного малого времени откачки к высокой удельной скорости действия (отнесенной к площади входного сечения насоса). По этим параметрам крионасосы превосходят многие высоковакуумные насосы. При создании криовакуумных насосов необходимо обеспечить равномерное намораживание твердого конденсата (криослоя) на криоповерхности (рис. 4.1).

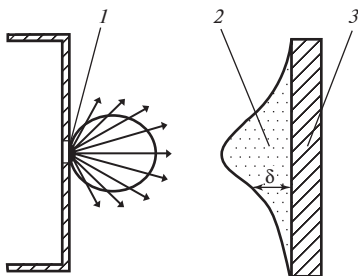
С увеличением толщины слоя  $\delta$  растет разность между температурами поверхности конденсата и криопанели, что приводит к уменьшению коэффициента прилипания криослоя. Быстрота действия крионасоса определяется по выражению

$$S_n = 36,4\gamma F \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

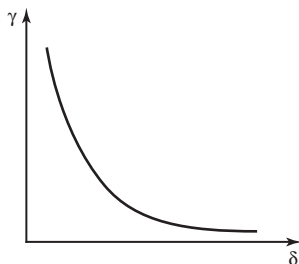
где  $\gamma$  — коэффициент прилипания;  $F$  — площадь криоповерхности;  $T$  и  $\mu$  — температура и молекулярная масса конденсируемого газа.

Качественная зависимость коэффициента прилипания поверхности криослоя от его толщины показана на рис. 4.2.

Формирование равномерного слоя необходимо при создании защитных покрытий режущих инструментов (резцы, фрезы, сверла, медицинский инструмент). Вопрос о равномерности покрытия возникает



**Рис. 4.1. Схема распределения криослоя:**  
1 — источник; 2 — криослой; 3 — криопанель



**Рис. 4.2. Зависимость коэффициента прилипания от толщины криослоя**

при формировании декоративных покрытий на ювелирных изделиях, корпусах часов, значках, медалях и др. Форму профиля наносимого покрытия также необходимо знать при создании элементной базы в электронном машиностроении, где тонкие покрытия на поверхности деталей создаются с помощью напыления в вакууме.

Очевидно, что форма поверхности конденсата будет зависеть как от геометрических характеристик источника и криповерхности, так и от режима истечения газа из отверстия в вакуум и продолжительности процесса намораживания. Форма источника влияет на угловое распределение частиц конденсируемого газа в выходном сечении. Угловое распределение частиц на выходе из источника в зависимости от его геометрических характеристик можно описать с помощью лепесткового, косинусного (диффузного), равномерного законов распределения (см. рис. 2.13), а также распределения Гаусса.

#### **4.1.1. Зависимости для определения профилей криослоев**

А.М. Макаровым была предложена методика расчета профиля криослоя, образующегося на различных поверхностях, для источника с функцией распределения Гаусса. Затем им были получены зависимости для лепесткового, косинусного и равномерного распределений частиц на выходе из источника. Данные зависимости справедливы при следующих допущениях:

- рассматривается модель идеального газа — свободномолекулярное течение;
- физико-химические процессы не происходят;
- течение осесимметричное;
- частицы двигаются по прямолинейным траекториям;

- каждая молекула, падающая на криповерхность или на поверхность твердого конденсата, закрепляется на ней при первом столкновении;
- вторичное испарение отсутствует.

Рассмотрим зависимости для определения профиля криослоя, образующегося на различных поверхностях, для нескольких источников.

**Линейный источник массы.** Линейный источник массы является физической идеализацией истечения газа из щели постоянной ширины или из системы отверстий, расположенных близко друг к другу и имеющих общее преимущественное направление истечения. Запишем функции распределений:

1) *распределение Гаусса*

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.1)$$

где  $P(x)$  — плотность вероятности;  $P(x)dx$  — вероятность оказаться в интервале  $(x; x+dx)$ ;  $\sigma$  — параметр распределения (среднеквадратичное отклонение).

Необходимо выполнить условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1.$$

Обозначим  $P(x) = A\gamma(x)$ . Находим нормировочный коэффициент  $A$ :

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} A\gamma(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = A\sigma\sqrt{2\pi} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}; \end{aligned}$$

2) *косинусное распределение*

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} \cos \varphi. \quad (4.2)$$

Определим коэффициент  $A$  так же, как при распределении Гаусса:

$$W(\varphi) = A \cos \varphi.$$

Из условий нормировки:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A \cos \varphi d\varphi = A \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2};$$

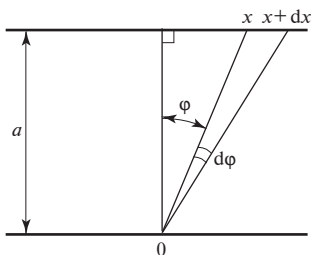


Рис. 4.3. Связь функций плотностей вероятности  $P(x)$  и  $W(\varphi)$

3) лепестковое распределение

$$W(\varphi) = A \cos^n \varphi. \quad (4.3)$$

Из условий нормировки:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A \cos^n \varphi d\varphi = 1 \Rightarrow A = \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi \right]^{-1};$$

4) равномерное распределение

$$W(\varphi) = \frac{1}{\pi}. \quad (4.4)$$

Из условий нормировки:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} d\varphi = 1 \Rightarrow A = 1.$$

Из рис. 4.3 следует связь между декартовыми и цилиндрическими координатами:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \operatorname{tg} \varphi; & \varphi &= \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{a} \right); & dx &= a \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}; \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$P(x)dx = W(\varphi)d\varphi.$$

Используя соотношения (4.5), получаем:

$$\left. \begin{aligned} P(x)a \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} &= W(\varphi)d\varphi; \\ P(x) &= W(\varphi) \frac{\cos^2 \varphi}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Таким образом, линейные и угловые плотности вероятности для разных типов распределений имеют вид:

распределение Гаусса

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \quad W(\varphi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma^2}} \right) \frac{a}{\cos^2 \varphi};$$

косинусное распределение

$$P(x) = \frac{\cos^3(\arctan(x/a))}{2a}; \quad W(\varphi) = \frac{1}{2} \cos \varphi;$$

лепестковое распределение

$$P(x) = A \frac{\cos^{n+2}(\arctg(x/a))}{a}; \quad W(\varphi) = A \cos^n \varphi;$$

равномерное распределение

$$P(x) = \frac{\cos^2(\arctg(x/a))}{\pi a}; \quad W(\varphi) = \frac{1}{\pi}.$$

Указанные выше зависимости описывают распределение частиц на выходе из источника массы. Теперь необходимо связать профиль (форму) криослоя с этими распределениями.

**Линейный источник массы над бесконечной плоскостью.** Рассмотрим случай, когда ось источника (преимущественное направление истечения) перпендикулярна плоскости конденсирующей поверхности. Определим массу конденсата (на единицу длины), попавшую на поверхность в интервале от  $x$  до  $x+dx$  (рис. 4.4).

Объем конденсата (на единицу длины), осевший между плоскостями, расположенными под углами  $\varphi$  и  $\varphi+d\varphi$ , с точностью до членов второго порядка имеет вид

$$dV = 0,5l^2 d\varphi - 0,5(l-h)^2 d\varphi = h \left( l - \frac{h}{2} \right) d\varphi. \quad (4.7)$$

**Рис. 4.4. Линейный источник массы над плоскостью:**

$h$  — толщина слоя конденсата, измеренная вдоль линии распространения потока;  $a$  — расстояние от источника до криповерхности;  $\delta$  — толщина наможенного слоя вдоль направления нормали к криповерхности



Данное выражение соответствует объему, находящемуся в заштрихованной части (см. рис. 4.4).

Масса конденсата

$$dm = \rho dV = MP(x)dx = \rho h \left( \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{h}{2} \right) d\varphi = MP(x) d\varphi \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$$

Из рис. 4.4 следует, что  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ . После соответствующей подстановки получим квадратное уравнение относительно  $h$ :

$$\begin{aligned} \rho h \left( \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{h}{2} \right) &= MP(x) \frac{a^2 + x^2}{a}; \\ \frac{h^2}{2} - h \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{MP(x)}{\rho a} (a^2 + x^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Решаем (4.8) при условии, что  $h < l$ :

$$h = \sqrt{a^2 + x^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2MP(x)}{\rho a}} \right). \quad (4.9)$$

Однако толщину намороженного слоя удобнее определять по направлению нормали к криповерхности:

$$\delta = h \cos \varphi = a \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2MP(x)}{\rho a}} \right). \quad (4.10)$$

Из геометрического подобия  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1BC_1$  следует, что  $\frac{x - x'}{x} = \frac{\delta}{a}$ . Отсюда

$$x' = x \sqrt{1 - \frac{2MP(x)}{\rho a}}. \quad (4.11)$$

По выражению (4.10) определяется толщина слоя конденсата  $\delta$  в области с координатой  $x'$ . Уравнения (4.10) и (4.11) являются параметрическими для поверхности конденсата.

После введения безразмерных величин:  $\bar{x} = \frac{x}{a}$ ;  $\bar{x}' = \frac{x'}{a}$ ;  $\Delta = \frac{\delta}{a}$ ;

$\chi = \frac{M}{\rho a}$ ;  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{a}$  получаем

$$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2\chi P(x)}; \quad (4.12)$$

$$\bar{x}' = \bar{x} \sqrt{1 - 2\chi P(x)}. \quad (4.13)$$



Из соотношений (4.12) и (4.13) следует, что профиль поверхности конденсата не остается подобным себе с увеличением количества замороженной массы (так как безразмерный параметр  $\chi$  в (4.12) и (4.13) — нелинейная величина). Универсальность этих соотношений заключается в том, что, с одной стороны, они применимы к любому закону распределения, с другой — при  $\chi \rightarrow 0$  имеем  $\bar{x}' \rightarrow x$  и

$$\Delta \rightarrow \chi^P(x). \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) показывает, что только для бесконечно тонкого криослоя форма поверхности замороженного конденсата повторяет графический вид закона распределения. Благодаря этому факту можно экспериментально исследовать параметры пространственного распределения молекулярных потоков источника массы.

На рис. 4.5 и 4.6 приведены результаты расчетов профилей поверхностей осажденного конденсата для распределений Гаусса (при среднеквадратичном отклонении  $\sigma = 0,5$ ), косинусного, лепесткового ( $n = 2$ ) и равномерного при различных значениях параметра  $\chi$ .

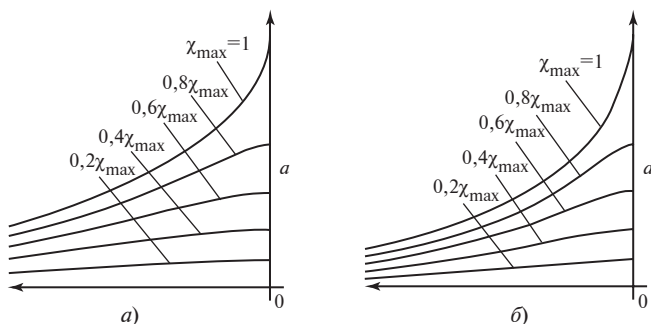


Рис. 4.5. Профили криослоев при линейном источнике массы над бесконечной плоскостью для распределений Гаусса ( $\sigma = 0,5$ ) (а) и косинусного (б)

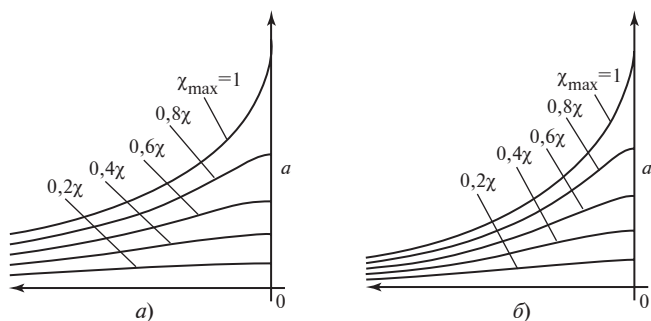


Рис. 4.6. Профили криослоев при линейном источнике массы над бесконечной плоскостью для лепесткового ( $n = 2$ ) (а) и равномерного (б) распределений



Рис. 4.7. Расположение источника массы относительно криопанели

**Линейный источник массы на оси цилиндра.** Уравнение крипоповерхности в цилиндрических координатах имеет вид  $r = a = \text{const}$ .

Уравнение искомой поверхности слоя конденсата можно записать как  $c = c(\varphi)$ . В пространство, ограниченное плоскостями, расположенными под углами  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$  (рис. 4.7), истекает масса  $dm = \frac{\rho}{2}(a^2 - c^2)d\varphi$ .

Учитывая, что  $dm = MW(\varphi)d\varphi$ , по-

лучаем

$$c = a \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho a^2} W(\varphi)}. \quad (4.15)$$

Толщина слоя, измеренная по радиусу, определяется по выражению

$$\delta = a - c = a \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho a^2} W(\varphi)} \right). \quad (4.16)$$

После введения безразмерных величин  $\Delta = \frac{\delta}{a}$ ,  $\chi = \frac{M}{\rho a^2}$  получаем

$$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2\chi W(\varphi)}. \quad (4.17)$$

Выражение (4.17) по форме аналогично уравнению (4.12). Как и в предыдущем случае, при  $\chi \rightarrow 0$  и  $\Delta \rightarrow \chi W(\varphi)$ , что дает возможность непосредственного исследования закона распределения для малых значений толщины криослоя.

Результаты расчета профиля криослоя, намороженного на цилиндрической крипоповерхности, для источников с лепестковым ( $n = 2$ ) и равномерным распределениями приведены на рис. 4.8. Рассматриваются несколько значений безразмерного параметра  $\chi$ .

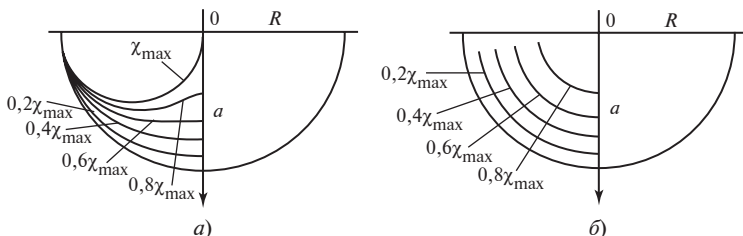


Рис. 4.8. Профили криослоя при линейном источнике массы на оси цилиндра: а, б — лепестковое ( $n = 2$ ) и равномерное распределение соответственно

**Линейный источник массы над цилиндрической поверхностью.** Пусть линейный источник располагается параллельно криповерхности, радиус которой равен  $R$ . Тогда по теореме косинусов для  $\triangle OAC$  (рис. 4.9) получаем

$$R^2 = (a + R)^2 + r^2 - 2r(a + R)\cos\varphi.$$

Это выражение представляет собой квадратное уравнение относительно  $r$ :

$$r^2 - 2r(a + R)\cos\varphi + a^2 + 2aR = 0.$$

Отсюда

$$r = \frac{2(a + R)\cos\varphi \pm \sqrt{4(a + R)^2\cos^2\varphi - 4(a^2 + 2aR)}}{2},$$

так как  $\frac{a + R}{\cos\varphi} \geq r \geq a - R$ , то в выражении для  $r$  выбираем знак «минус»:

$$r = (a + R)\cos\varphi \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{a^2 + 2aR}{(a + R)^2\cos^2\varphi}} \right]. \quad (4.18)$$

Соотношение (4.18) — уравнение криогенной поверхности. Опуская промежуточные рассуждения и выкладки, которые были рассмотрены ранее, и заменяя  $a$  на  $r(\varphi)$ , получаем уравнение поверхности конденсата:

$$\frac{\delta}{a} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho r^2} W(\varphi)}. \quad (4.19)$$

После введения безразмерных величин  $\Delta = \frac{\delta}{a}$ ,  $\chi = \frac{M}{\rho a^2}$  получаем

$$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2\frac{\chi}{r^2/a^2} W(\varphi)}. \quad (4.20)$$

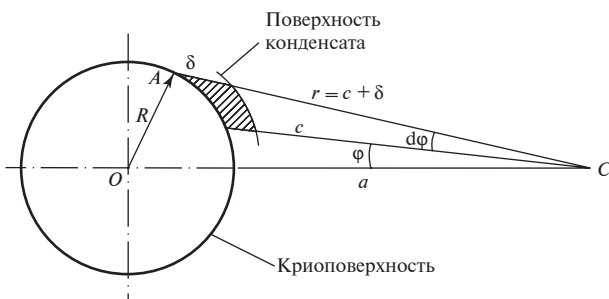
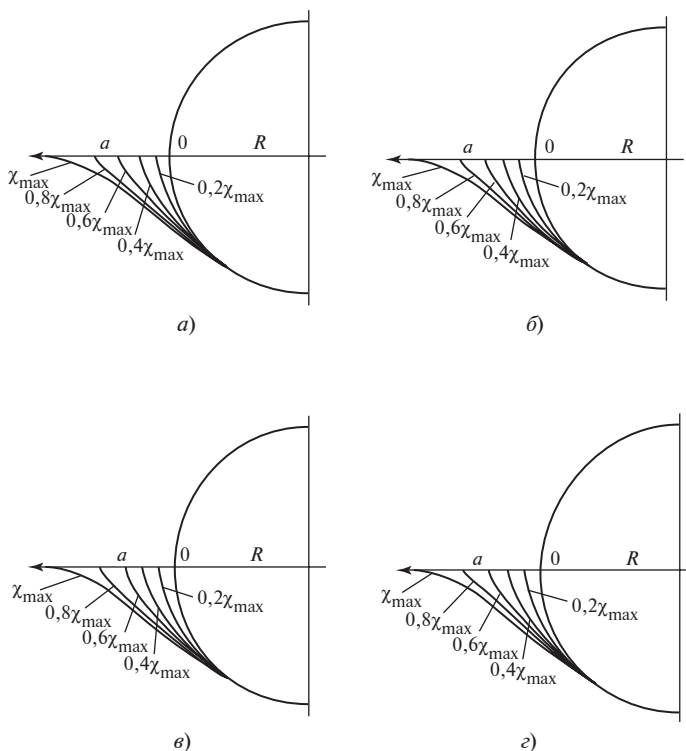


Рис. 4.9. Расположение источника массы относительно криповерхности



**Рис. 4.10. Профили криослоев при линейном источнике массы над цилиндрической поверхностью для различных распределений:**

*a* — распределения Гаусса ( $\sigma = 0,5$ ); *б* — косинусного; *в* — лепесткового ( $n = 2$ ); *г* — равномерного

Заметим, что толщина бесконечно тонкого криослоя ( $\chi \rightarrow 0$ ) графически не повторяет вид закона распределения. Это значит, что экспериментально невозможно исследовать закон распределения молекулярного потока источника. На рис. 4.10 представлены результаты расчетов, полученные по формуле (4.20), для распределений Гаусса ( $\sigma = 0,5$ ), косинусного, лепесткового ( $n = 2$ ) и равномерного.

**Точечный источник массы.** Точечный источник массы является физической идеализацией истечения парообразного конденсата из отверстия, характерный линейный размер которого значительно меньше расстояния между источником массы и криогенной поверхностью. Так как выше было введено предположение об осесимметричном истечении газа, можно ограничиться одномерным видом функций распределений.

Рассматриваемый точечный источник располагается на расстоянии  $a$  от бесконечной плоской криповерхности (рис. 4.11), причем ось источника (преимущественное направление истечения конденсируемого газа) перпендикулярна указанной плоскости. Точка пересечения оси источника с криповерхностью принята за начало отсчета цилиндрических координат  $\psi$  и  $r$ .

Запишем функции распределений:

1) *распределение Гаусса*

$$f(r) = C e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} = C \gamma(r),$$

где  $C$  — нормировочный коэффициент.

$$\int_0^{\infty} f(r) dS = 1; \quad dS = 2\pi r dr.$$

$$\int_0^{\infty} C \gamma(r) dS = \int_0^{\infty} C e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} 2\pi r dr = C 2\sigma^2 \pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) = 1,$$

так как  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ , то  $C = \frac{1}{2\pi\sigma^2}$ .

Следовательно,

$$f(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}; \quad (4.21)$$

2) *косинусное распределение*

$$W(\varphi, \psi) = C \cos \varphi \sin \varphi.$$

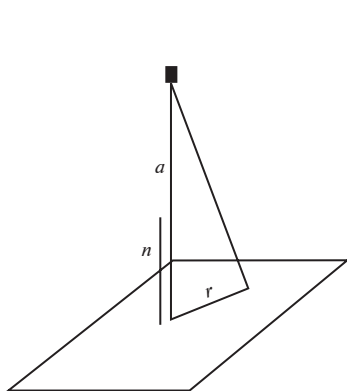


Рис. 4.11. Точечный источник массы

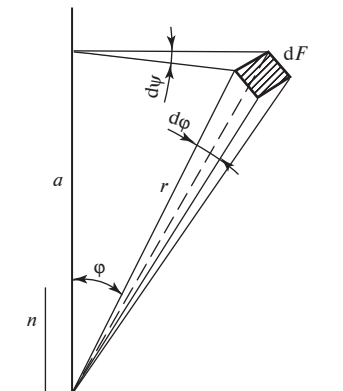


Рис. 4.12. Элемент поверхности криослоя

Доля частиц, вылетевших из источника в телесном угле  $d\omega$  (рис. 4.12), равна  $D = C \cos \varphi d\omega$ , где  $C$  — нормировочный коэффициент;  $\cos \varphi$  — вид распределения.

Согласно определению телесного угла  $d\omega = \frac{dF}{r^2}$ , где

$dF = r d\varphi r \sin \varphi d\psi = r^2 \sin \varphi d\varphi d\psi$  — площадь элементарной площадки на криповерхности. Следовательно, можно записать, что  $d\omega = \sin \varphi d\varphi d\psi$ , тогда

$$\int_{\omega} C \cos \varphi d\omega = 1;$$

$$1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} C \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 2\pi C \left. \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi C \Rightarrow C = \frac{1}{\pi};$$

$$W(\varphi, \psi) = \frac{1}{\pi} \cos \varphi \sin \varphi; \quad (4.22)$$

3) *лепестковое распределение*

$$W(\varphi, \psi) = C \cos^n \varphi \sin \varphi.$$

Как и для косинусного распределения, получаем:

$$1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} C \cos^n \varphi \sin \varphi d\varphi = -2\pi C \left. \frac{\cos^{n+1} \varphi}{n+1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi C \frac{1}{n+1} \Rightarrow C = \frac{n+1}{2\pi};$$

$$W(\varphi, \psi) = \frac{n+1}{2\pi} \cos^n \varphi \sin \varphi; \quad (4.23)$$

4) *равномерное распределение*

$$W(\varphi, \psi) = C \sin \varphi.$$

Аналогично предыдущим случаям имеем:

$$1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} C \sin \varphi d\varphi = 2\pi C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = 2\pi C \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi};$$

$$W(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sin \varphi; \quad (4.24)$$

$$f(r) dS = W(\varphi, \psi) d\varphi d\psi.$$

Площадь проекции элементарной площадки на криповерхность

$$dS = \frac{dF}{\cos \varphi} = \frac{r^2 \sin \varphi d\varphi d\psi}{\cos \varphi} = \frac{a^2 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi d\psi.$$

Следовательно,

$$f(r) = W(\varphi, \psi) \frac{\cos^3 \varphi}{a \sin \varphi}, \quad (4.25)$$

где  $\varphi = \arctg\left(\frac{r}{a}\right)$ .

Распределение Гаусса

$$f(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}; \quad W(\varphi, \psi) = \frac{a^2}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma^2}} \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi};$$

косинусное распределение

$$f(r) = \frac{\cos^4 \arctan \frac{r}{a}}{\pi a^2}; \quad W(\varphi, \psi) = \frac{1}{\pi} \cos \varphi \sin \varphi;$$

лепестковое распределение

$$f(r) = \frac{n+1}{2\pi a^2} \cos^{n+3} \arctan \frac{r}{a}; \quad W(\varphi, \psi) = \frac{n+1}{2\pi} \cos^n \varphi \sin \varphi;$$

равномерное распределение

$$f(r) = \frac{\cos^3 \arctan \frac{r}{a}}{2\pi a^2}; \quad W(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sin \varphi.$$

**Точечный источник массы над бесконечной плоскостью.** Точечный источник расположен на расстоянии  $a$  от бесконечной плоскости. Объем конденсата, осевшего в телесном угле, который ограничен площадкой  $dS$ , составляет

$$dV = \frac{1}{3} dSa - \frac{1}{3} dS'(a - \delta) = \frac{1}{3} adS \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right)^3 \right), \quad (4.25a)$$

где  $\delta$  — толщина слоя (расстояние от криповерхности до поверхности конденсата). Из подобия пирамид (рис. 4.13) следует

$$\frac{dS'}{dS} = \frac{(a - \delta)^2}{a^2}.$$

Масса криослоя, осевшего в телесном угле, равна

$$dm = \rho dV = Mf(r)dS = \frac{\rho adS}{3} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right)^3 \right).$$

Выразим из данного уравнения  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\delta}{a} = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3Mf(r)}{\rho a}}.$$





Уравнения (4.26) и (4.27) являются параметрическими для поверхности криослоя. При бесконечно малом количестве намороженной массы ( $\chi \rightarrow 0$ ) получаем  $r' \rightarrow r$  и  $\Delta \rightarrow \chi f(r)$ . Это означает, что функцию распределения источника можно проверить экспериментально. Результаты расчета профиля по (4.26) и (4.27) представлены на рис. 4.14 для всех рассматриваемых функций распределения ( $\sigma = 0,5$  и  $n = 2$ ).

**Точечный источник массы в центре сферической поверхности.** Площадка  $dS_a$  — элемент криопанели сферической формы с радиусом  $a$  (рис. 4.15):

$$dS_a = a d\varphi a \sin \varphi d\psi.$$

Для определения объема конденсата, осевшего в телесном угле, ограниченном площадкой  $dS_a$ , с точностью до второго порядка можно применить формулу (4.25a):

$$dm = \rho dV = MW(\varphi, \psi) d\varphi d\psi.$$

Следовательно,

$$\frac{\rho a^3 \sin \varphi \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right)^3 \right)}{3} = MW(\varphi, \psi);$$

$$\Delta = \frac{\delta}{a} = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3M}{\rho a^3} \frac{W(\varphi, \psi)}{\sin \varphi}}.$$

После введения безразмерных величин  $\chi = \frac{M}{\rho a^3}$ ,  $U(\varphi) = \frac{W(\varphi, \psi)}{\sin \varphi}$  получим

$$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3\chi U(\varphi)}. \quad (4.28)$$

При  $\chi \rightarrow 0$  величина  $\Delta \rightarrow \chi U(\varphi)$ , т.е. толщина намороженного слоя, графически повторяет вид закона распределения. Профили криослоев, построенные в соответствии с (4.28), представлены на рис. 4.16 для рассматриваемых функций распределения молекулярного потока ( $\sigma = 0,5$  и  $n = 2$ ).

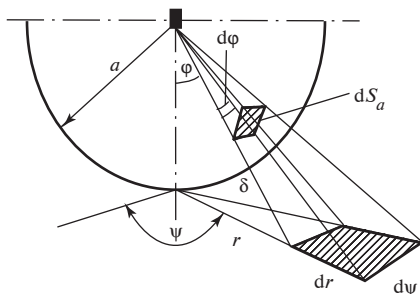
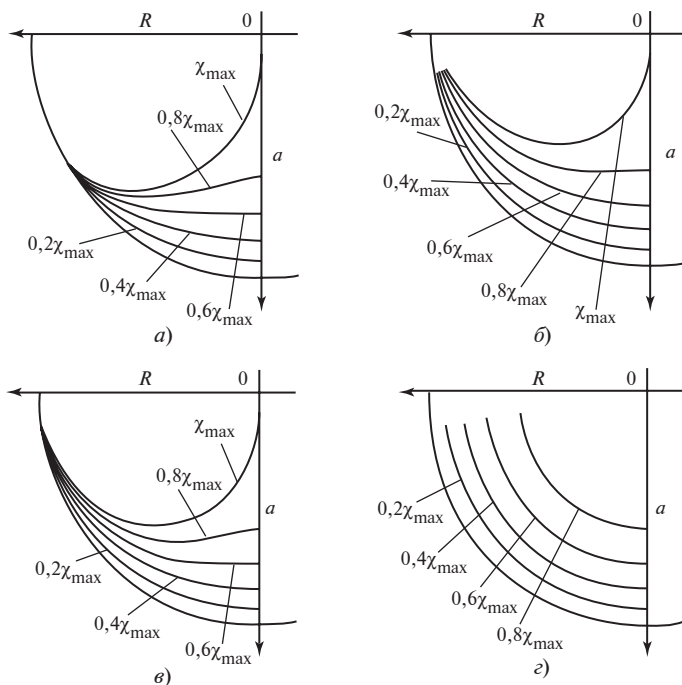


Рис. 4.15. Элемент поверхности криослоя



**Рис. 4.16. Профили кирпослоев при точечном источнике массы в центре сферической поверхности для различных распределений:**  
обозначения те же, что и на рис. 4.10

**Точечный источник массы над сферической поверхностью.** Точечный источник находится на расстоянии  $a$  от криповерхности, имеющей форму сферы, ось источника проходит через центр сферы. Если обозначить через  $\varphi$  угол между радиус-вектором, проведенным в рассматриваемую точку криповерхности, и осью источника массы, то расстояние от источника до сферы можно рассчитать по следующей формуле:

$$\tilde{r} = (1 + \tau) \cos \varphi \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{1 + 2\tau}{(1 + \tau)^2 \cos^2 \varphi}} \right], \quad (4.29)$$

где  $\tilde{r} = \frac{r}{a}$ ;  $\tau = \frac{R}{a}$ ;  $R$  — радиус сферической криповерхности.

Это соотношение аналогично (4.18) для случая линейного источника над цилиндрической поверхностью. Объем конденсата, находящегося в телесном угле, определяется по формуле

$$dV = \frac{1}{3} r dS_r \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right)^3 \right),$$

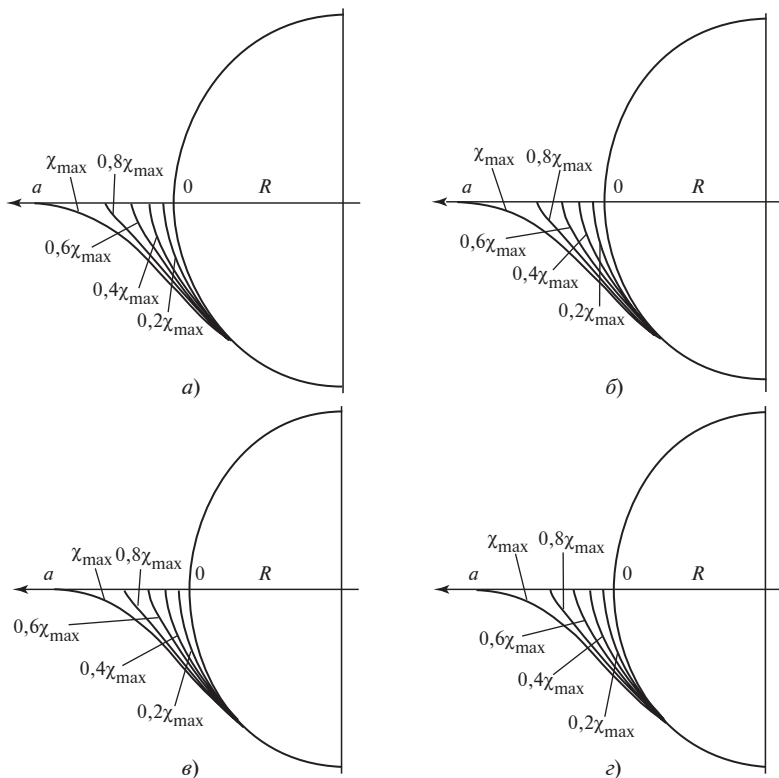
где  $dS_r = dS_a \frac{r^2}{a^2}$ .

Сделав те же преобразования, что и для точечного источника массы в центре сферической поверхности, получим:

$$dm = \rho dV = MW(\varphi, \psi) d\varphi d\psi;$$

$$\frac{\rho r^3 \sin \varphi}{3} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{a} \right)^3 \right) = MW(\varphi, \psi);$$

$$\Delta = \frac{\delta}{a} = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3M}{\rho r^3} \frac{W(\varphi, \psi)}{\sin \varphi}}.$$



**Рис. 4.17. Профили крислоев при точечном источнике массы над сферической поверхностью для различных распределений:**  
обозначения те же, что и на рис. 4.10

С учетом безразмерных величин  $\chi = \frac{M}{\rho a^3}$ ,  $U(\varphi) = \frac{W(\varphi, \psi)\varphi}{\sin \varphi}$ ,

$\Delta = \frac{\delta}{a}$  будем иметь

$$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3 \frac{\chi}{(r/a)^3} U(\varphi)}. \quad (4.30)$$

Выражение (4.30) не является параметрическим уравнением для поверхности криослоя. Это значит, что экспериментально невозможно исследовать функцию распределения источника массы. Профили криослоев для распределений Гаусса ( $\sigma = 0,5$ ), косинусного, лепесткового ( $n = 2$ ) и равномерного изображены на рис. 4.17.

**Анализ профилей криослоев для группы источников.** На рис. 4.18 и 4.19 показаны профили криослоев, намораживаемых на бесконечную пластину группой из четырех точечных источников, лежащих на одной прямой.

Рассматриваются источники массы с распределениями Гаусса ( $\sigma = 1$ ), косинусным, лепестковым ( $n = 2$ ) и равномерным. Расстояние между ними равно расстоянию от источника до криповерхности.

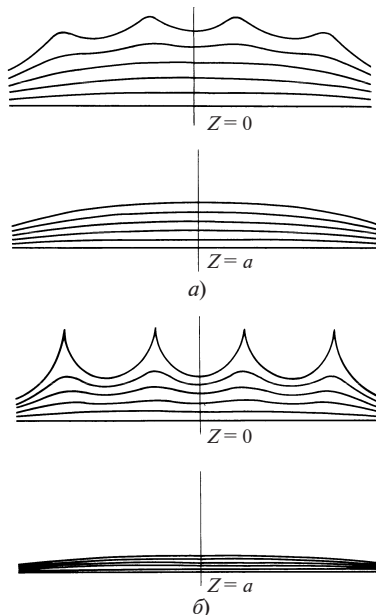
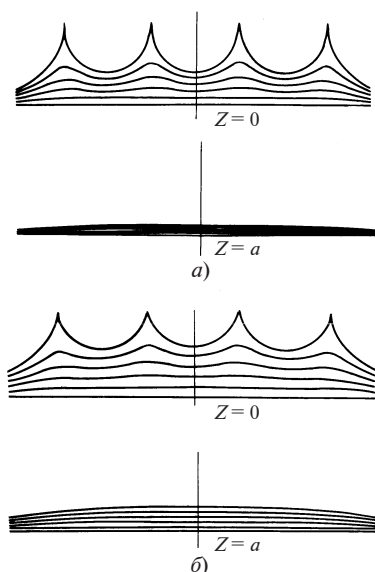


Рис. 4.18. Профили криослоев, формируемых четырьмя источниками с распределениями Гаусса ( $\sigma = 1$ ) (а) и косинусным (б)



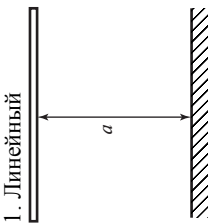
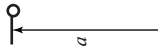
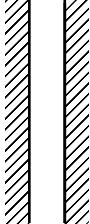
**Рис. 4.19. Профили криослоев, формируемых четырьмя источниками с лепестковым ( $n = 2$ ) (а) и равномерным (б) распределениями**

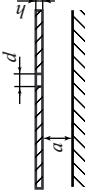
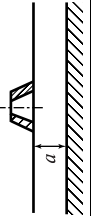
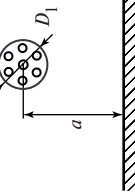
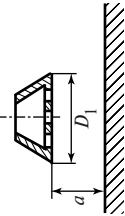
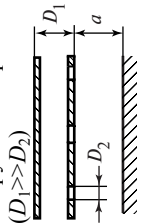
На рисунках показаны схематичные разрезы слоя конденсата в следующих плоскостях: проходящей через ось симметрии источника, перпендикулярной криопанели ( $z = 0$ ) и расположенной на расстоянии  $a$  от оси симметрии источника ( $z = a$ ). Нетрудно заметить, что наиболее равномерный криослой обеспечивает источник с гауссовым распределением при  $\sigma = 1$ .

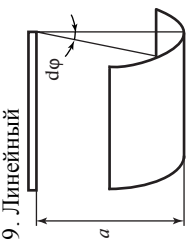
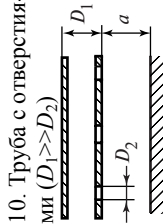
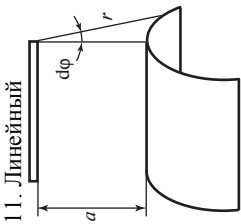
В табл. 4.1 рассматриваются случаи формирования криослоя на криповерхностях различной формы при выходе газа из различных источников и предлагаются зависимости для определения профиля криослоя. В таблице используются следующие обозначения:  $m$  — масса образованного твердого конденсата, кг;  $\rho$  — его плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $a$  — расстояние от источника массы до криповерхности, м;  $\delta$  — толщина слоя твердого конденсата, м;  $\Delta$  — безразмерная толщина криослоя;  $\bar{x}'$  — безразмерная координата, в области которой определяется толщина слоя;  $D_1$  — диаметр трубы (сферы и др.);  $D_2$  — диаметр отверстия в трубе.

Таблица 4.1

## Случаи формирования криослоя на разных криоповерхностях при выходе газа из различных источников

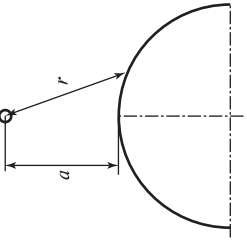
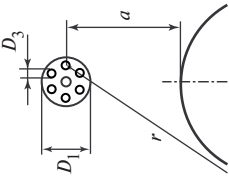
Источник	Вид функции распределения источника массы	Уравнение поверхности слоя конденсата	Примечание
<i>Источник массы над плоской криоповерхностью</i>			
1. Линейный 	Гаусса $P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ ; косинусное $P(\varphi) = \frac{\cos^3 \varphi}{2a}$ ; лепестковое $P(\varphi) = A \frac{\cos^{n+2}}{a}$ ; равномерное $P(\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi}{\pi a}$	$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2kP(x)}$ ; $\bar{x}' = \sqrt{1 - 2kP(x)}$	$k = \frac{\mu}{\rho a}$ ; $\Delta = \frac{\delta}{a}$ ; $\bar{x}' = \frac{x'}{a}$ ; $A = \left[ \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi \right]^{-1}$ ; $x = atg\varphi$
2. Точечный 	Гаусса $f(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ ; косинусное $f(\varphi) = \frac{\cos^4 \varphi}{\pi a^2}$ ; лепестковое $f(\varphi) = (n+1) \frac{\cos^{n+3} \varphi}{2\pi a^2}$ ; равномерное $f(\varphi) = \frac{\cos^3 \varphi}{2\pi a^2}$	$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$ ; $\bar{r}' = \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$	$k = \frac{\mu}{\rho a}$ ; $\Delta = \frac{\delta}{a}$ ; $\bar{r}' = \frac{r'}{a}$ ; $r = atg\varphi$
3. Плоскость 	Равномерное $h = \text{const}$	$\Delta = \text{const}$	Если размеры испускающей плоскости меньше криоповерхности, то в граничных областях необходимо учесть краевые эффекты

Источник	Вид функции распределения источника массы	Уравнение поверхности слоя конденсата	Примечание
4. Диафрагма 	Косинусное $f(\varphi) = \frac{\cos^4 \varphi}{\pi a^2}$	$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$ ; $\bar{r}' = \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$	$h \ll d$
5. Трубопровод 	Лепестковое $f(\varphi) = (n+1) \frac{\cos^{n+3} \varphi}{2\pi a^2}$	$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$ ; $\bar{r}' = \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$	Степень лепесткового распределения $n$ зависит от геометрических характеристик трубопровода
6. Сфера с отверстиями 	$a \cong D_1$	$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$ ; $\bar{r}' = \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$	Применяем принцип суперпозиции для профилей точечных источников, имеющих косинусное распределение
	$a \gg D_1$		Идеальный вариант — точечный равномерный источник
7. Душ 	$a \cong D_1$		См. примечание к случаю 6
	$a \gg D_1$	$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$ ; $\bar{r}' = \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$	Идеальный вариант — точечный источник, имеющий косинусное распределение
8. Труба с отверстиями ( $D_1 \gg D_2$ ) 	$a \cong D_1$		См. примечание к случаю 6
	$a \gg D_1$	$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2kP(x)}$ ; $\bar{x}' = \sqrt{1 - 2kP(x)}$	Физической идеализацией является линейный источник. Функции распределения те же, что для случая 1

Источник	Вид функции распределения источника массы	Уравнение поверхности слоя конденсата	Примечание
<i>Источник массы в центре цилиндрической криповерхности</i>			
<p>9. Линейный</p> 	<p>Гаусса <math>W(\varphi) = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cos^2 \varphi e^{-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma^2}}</math> ;          косинусное <math>W(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{2}</math> ;          лепестковое <math>W(\varphi) = A \cos^n \varphi</math> ;          равномерное <math>W(\varphi) = \frac{1}{\pi}</math></p>	$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2kW(\varphi)}$	$k = \frac{\mu}{\rho a^2}; \Delta = \frac{\delta}{a}$ $A = \left[ \frac{\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}} \int \cos^n \varphi d\varphi \right]^{-1}$
<p>10. Труба с отверстиями (<math>D_1 \gg D_2</math>)</p> 	<p><math>a \cong D_1</math>  <math>a \gg D_1</math></p>	$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2kW(\varphi)}$	<p>См. примечание к случаю 6</p> <p>Физической идеализацией является линейный источник. Функции распределения те же, что для случая 9</p>
<i>Источник массы над цилиндрической криповерхностью</i>			
<p>11. Линейный</p> 	<p>Гаусса <math>W(\varphi) = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cos^2 \varphi e^{-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma^2}}</math> ;          косинусное <math>W(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{2}</math> ;          лепестковое <math>W(\varphi) = A \cos^n \varphi</math> ;          равномерное <math>W(\varphi) = \frac{1}{\pi}</math></p>	$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2\frac{kW(\varphi)}{(r/a)^2}}$	$k = \frac{\mu}{\rho a^2}; \Delta = \frac{\delta}{a}$ $A = \left[ \frac{\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}} \int \cos^n \varphi d\varphi \right]^{-1}$



Источник	Вид функции распределения источника массы	Уравнение поверхности слоя конденсата	Примечание
12. Труба с отверстиями ( $D_1 \gg D_2$ )	$a \cong D_1$	$\Delta = 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{kW(\varphi)}{(r/a)^2}}$	См. примечание к случаю 6
	$a \gg D_1$		Физической идеализацией является линейный источник. Функции распределения те же, что для случая 11
Источник массы в центре сферической криоповрхности			
13. Точечный	Гаусса $W(\varphi, \psi) = \frac{a^2 \sin \varphi}{2\pi \sigma^2 \cos^3 \varphi} e^{-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma^2}}$ ; косинусное $W(\varphi, \psi) = \frac{1}{\pi} \sin \varphi \cos \varphi$ ; лепестковое $W(\varphi, \psi) = \frac{1+n}{2\pi} \sin \varphi \cos^n \varphi$ ; равномерное $W(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sin \varphi$	$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3kU(\varphi)}$	$k = \frac{\mu}{\rho a}$ ; $\Delta = \frac{\delta}{a}$ ; $U(\varphi) = \frac{W(\varphi, \psi)}{\sin \varphi}$
14. Сфера с отверстиями ( $D_1 \gg D_3$ )	$a \cong R_1$	$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3kU(\varphi)}$	См. примечание к случаю 6
	$a \gg R_1$		Физической идеализацией является точечный равномерный источник. Функции распределения те же, что для случая 6

Источник	Вид функции распределения источника массы	Уравнение поверхности слоя конденсата	Примечание
<i>Источник массы над сферической криповерхностью</i>			
15. Точечный		$W(\varphi, \psi) = \frac{a^2 \sin \varphi}{2\pi\sigma^2 \cos^3 \varphi} e^{-\frac{a^2 \tan^2 \varphi}{2\sigma^2}};$ <p>косинусное <math>W(\varphi, \psi) = \frac{1}{\pi} \sin \varphi \cos \varphi;</math></p> <p>лестничное <math>W(\varphi, \psi) = \frac{1+n}{2\pi} \sin \varphi \cos^n \varphi;</math></p> <p>равномерное <math>W(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sin \varphi</math></p>	$k = \frac{\mu}{\rho a};$ $\Delta = \frac{\delta}{a};$ $U(\varphi) = \frac{W(\varphi, \psi)}{\sin \varphi}$
16. Сфера с отверстиями ( $D_1 \gg D_3$ )		$\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3k}{\left(\frac{r}{a}\right)^2} U(\varphi)}$	См. примечание к случаю 6
	$a \gg R_1$		Физической идеализацией является линейный равномерный источник массы

#### 4.1.2. Учет нелинейности

Уравнения поверхности слоя конденсата, приведенные в табл. 4.1, получены для так называемой линейной постановки, т. е. без учета ранее намороженного слоя. На рис. 4.20 показаны профили криослоев, построенные без учета и с учетом ранее намороженного слоя, для различной массы  $m$  намороженного конденсата. Из рисунка видно, что в линейной постановке для получения более точного результата по формулам, приведенным в табл. 4.1, необходимо скорректировать параметры функции распределения источника массы в процессе формирования криослоя.

Для определения формы криослоя в нелинейной постановке (с учетом ранее намороженного слоя) применяется метод статистических испытаний — метод Монте-Карло. Методика построения профиля криослоя по методу Монте-Карло заключается в следующем: пространство между криопанелью и источником разбивается на ячейки размером 0,25 мм. Затем по алгоритму, описанному в гл. 1, произвольно выбирается траектория движения частицы. Если частица ударяется о криопанель или ранее сформированный слой, то она занимает место в ячейке, соответствующей точке столкновения.

В работе [8] проводится сравнение профилей криослоя, полученных для некоторых приведенных в табл. 4.1 случаев и найденных по методу Монте-Карло. На основе этого сравнения были построены номограммы (рис. 4.21), позволяющие определить вид функции распределения источника массы и его параметры в зависимости от его геометрических характеристик и толщины криослоя.

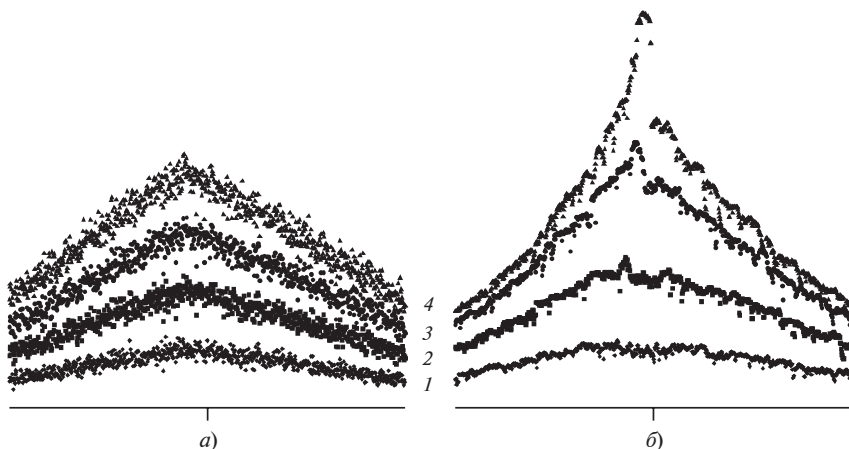


Рис. 4.20. Профили криослоев в линейной (а) и нелинейной (б) постановках:

1 —  $m = m_1$ ; 2 —  $m = m_2$ ; 3 —  $m = m_3$ ; 4 —  $m = m_4$

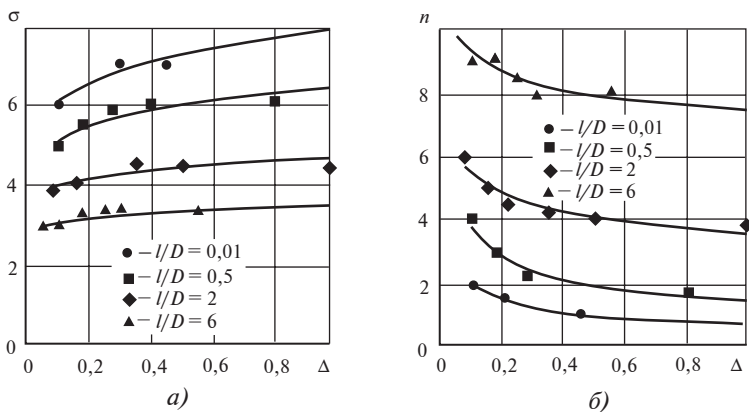


Рис. 4.21. Зависимость среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  (а) и степени лепесткового распределения  $n$  (б) от толщины намороженного криослоя  $\Delta$

Номограмма, с помощью которой можно найти среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  распределения Гаусса для источника массы в зависимости от его геометрических характеристик (отношение длины  $l$  к диаметру  $D$ ) и толщины намороженного слоя  $\Delta$ , показана на рис. 4.21, а.

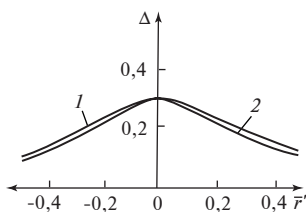
Номограмма, по которой можно определить степень лепесткового распределения  $n$  (косинусное и равномерное распределения являются частными случаями лепесткового распределения со степенями  $n = 1$  и  $n = 0$  соответственно) для источника массы, представлена на рис. 4.21, б.

Приведенные номограммы справедливы для случаев 2, 4—7 (см. табл. 4.1).

### 4.1.3. Пример расчета профиля криослоя

В качестве примера определим профиль намороженного криослоя (используя табл. 4.1 и номограммы) для случая, когда газ вылетает из трубопровода длиной  $l = 2$  мм и диаметром  $D = 1$  мм и образует на плоской криповерхности твердый конденсат. Расстояние от источника (трубопровода) до криповерхности  $a = 1$  мм, максимальная толщина намороженного криослоя  $\delta_{\max} = 3$  мм.

По номограммам находим, что для источника с  $l/D = 2,0$  и толщины криослоя  $\Delta_{\max} = 0,3$  используется лепестковое распределение (степень  $n = 4,5$ ) или распределение Гаусса со среднеквадратичным отклонением  $\sigma = 4,3$  мм. Максимальная толщина криослоя находится на оси трубопровода и соответствует координате  $r = 0$  или углу  $\varphi = 0$ . По



**Рис. 4.22. Профили криослоя для трубопровода с  $L/D = 2$ :**

1 — распределение Гаусса с  $\sigma = 4,3$ ; 2 — лепестковое распределение с  $n = 4,5$

формуле  $\Delta = 1 - \sqrt[3]{1 - 3kf(r)}$  определяем, что коэффициент  $k$  для лепесткового распределения и распределения Гаусса равен 25,0 и 25,4 соответственно. Зная коэффициент  $k$ , вид функции распределения источника и ее параметры, можно построить профиль криослоя. Для данного случая профили криослоя (рис. 4.22) получены по формулам, приведенным в табл. 4.1.

## **4.2. ВЛИЯНИЕ МИКРОГЕОМЕТРИИ СОРБЕНТОВ НА СОРБЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРИОНАСОСОВ**

В расчетах вакуумных систем серьезное значение имеет фундаментальное понятие коэффициента прилипания. Под термином «коэффициент прилипания» понимается вероятность того, что частица, ударившись о поверхность, останется на ней (сорбируется) или, что фактически то же самое, коэффициент прилипания — это отношение числа частиц, «прилипших» к поверхности, к общему числу ударившихся о поверхность частиц.

При конструировании криосорбционных насосов, а также других вакуумных откачивающих устройств, работающих по принципам конденсации и сорбции потоков газа, решающее значение имеет выбор структуры рабочей поверхности. Под структурой в данном случае понимается как макроскопический (жалюзийная, шевронная структуры и др.), так и микроскопический [шероховатость (зернистость)] характеры поверхности.

О влиянии микрогеометрии можно судить как по различным экспериментальным данным (например, сравнение скорости действия разных видов сорбционных насосов), так и по результатам традиционных расчетов (проводимость криогенных ловушек). О влиянии же микрогеометрии на откачные характеристики известно довольно немного, поскольку экспериментальные исследования крайне затруднены из-за чрезвычайно малых размеров анализируемых структур, а также необходимости создавать и удерживать сверхнизкие давления в системе.

В данном параграфе будем находить зависимость интегрального коэффициента прилипания, некоего «общего» для всей поверхности, которая имеет вид плоскости (на макроуровне), о значении которого можно судить из экспериментов, от локального (т. е. по сути «истинного») коэффициента прилипания, характеризующего вероятность «прилипания» частицы в данной точке.

Расчет будем проводить методом пробной частицы, принимая свободномолекулярный режим течения газа с диффузным законом отражения.

#### 4.2.1. Изучение характера поверхностей разных сорбентов

Чтобы изучить реальную микроструктуру поверхностей сорбентов с помощью электронного микроскопа производства ЗАО «КПД» (г. Зеленоград), характеристики которого показаны в табл. 4.2, были сняты профили с двух образцов хорошо известных типов активированных углей Chemviron SCII и Chemviron GFF/30, а также с двух образцов нераспыляемых геттеров типов 4t63 и 5t55. Результаты показаны на рис. 4.23—4.28 соответственно. Кроме того, на рис. 4.29 и 4.30 представлен фрагмент поверхности активированного угля Chemviron SCII при разных степенях увеличения. На рисунках наглядно показаны часть поверхности (рис. 4.29) и увеличенный фрагмент этой части (рис. 4.30). Координаты выбраны так, чтобы можно было быстро выяснить, какой фрагмент верхней структуры представлен.

Легко видеть при большем увеличении фрагмента поверхности, что его шероховатость гораздо значительнее, чем это может показаться вначале.

Таблица 4.2

**Характеристики электронного туннельного микроскопа СММ-2000Т**

Показатель	Значение (характеристика)
Поле кадра, мкм	20×20—40 × 40
Глубина кадра, мкм	До 2
Увеличение, раз	2000—30 000 000
Разрешение, Å	3 (при дополнительной виброзащите до 1)
Время снятия кадра, мин	0,2—2
Вид кадра	Оцифрованный по трем координатам записываемый файл, выводимый на дисплей в двумерном или трехмерном виде, в различных редактируемых палитрах и с виртуальной подсветкой, с возможностью вывода на принтер, экспорта в редакторы под MS Windows, пересылки по <i>e-mail</i> , дальнейшей обработки, прецизионной метрологии по кадру и его сечениям и др.
Размеры образца, мм	До 50×50×25

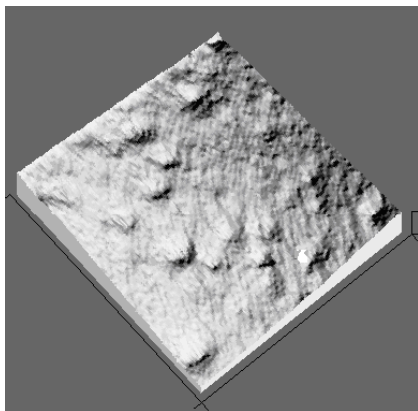


Рис. 4.23. Структура поверхности активированного угля Chemviron SCII (фрагмент 1,5×1,5 мкм)

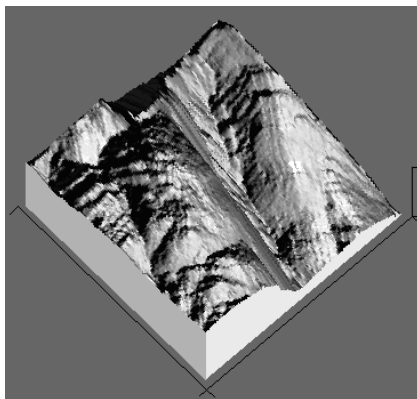


Рис. 4.24. Структура поверхности активированного угля Chemviron GFF/30 (фрагмент 2,5×2,5 мкм)

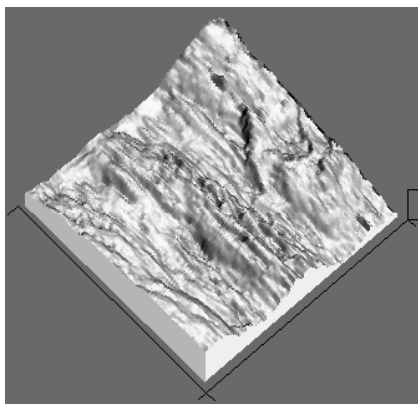


Рис. 4.25. Структура поверхности нераспыляемого геттера типа 4t63 (фрагмент 4,5×5,5 мкм)

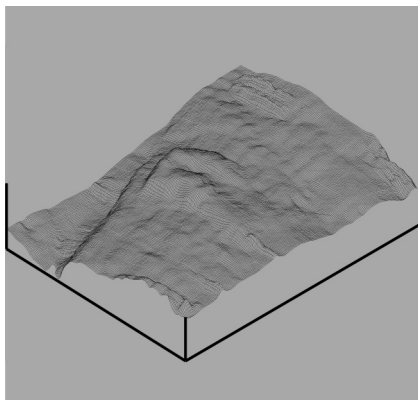
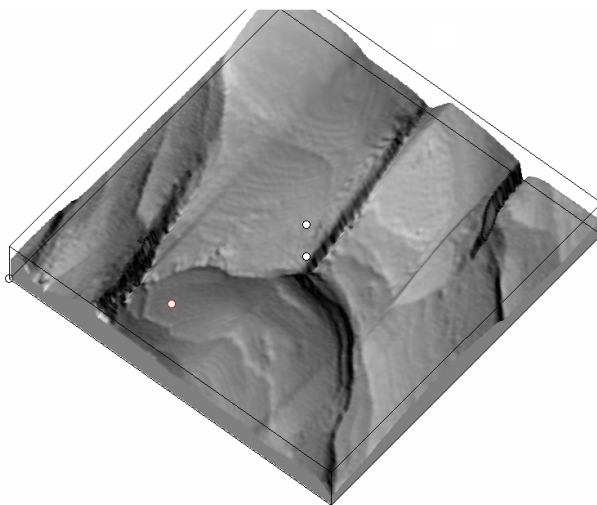
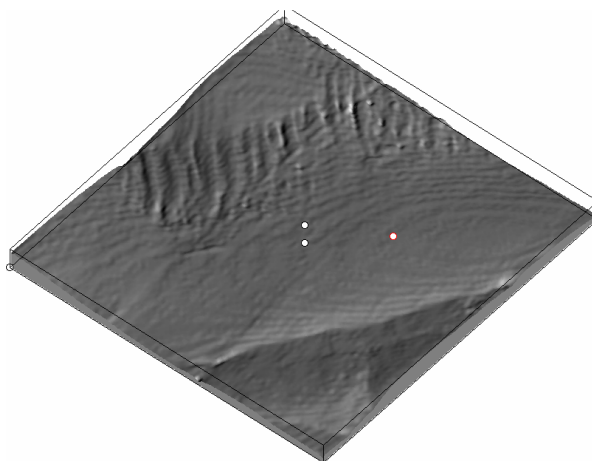


Рис. 4.26. Структура поверхности нераспыляемого геттера типа 5t55 (фрагмент 4×5 мкм)



**Рис. 4.27. Структура поверхности нераспыляемого геттера типа t41 (фрагмент 1,5×1,5 мкм)**



**Рис. 4.28. Структура поверхности нераспыляемого геттера типа t44 (фрагмент 1,5×1,5 мкм)**



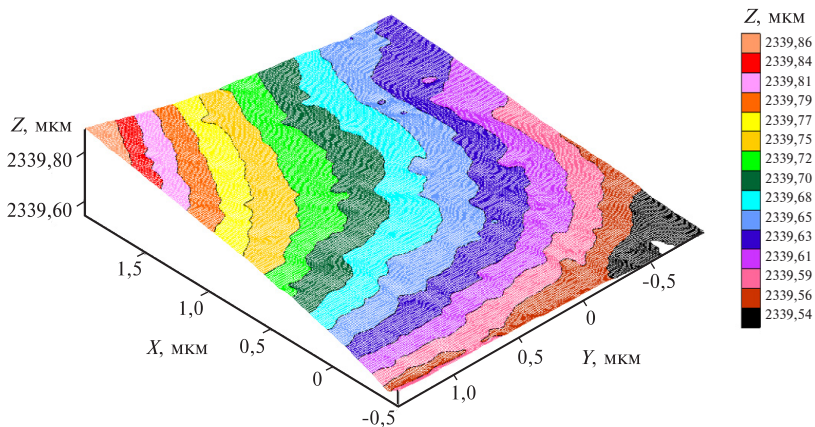


Рис. 4.29. Вид фрагмента поверхности активированного угля Chemviron SCII при увеличении в 40 000 раз

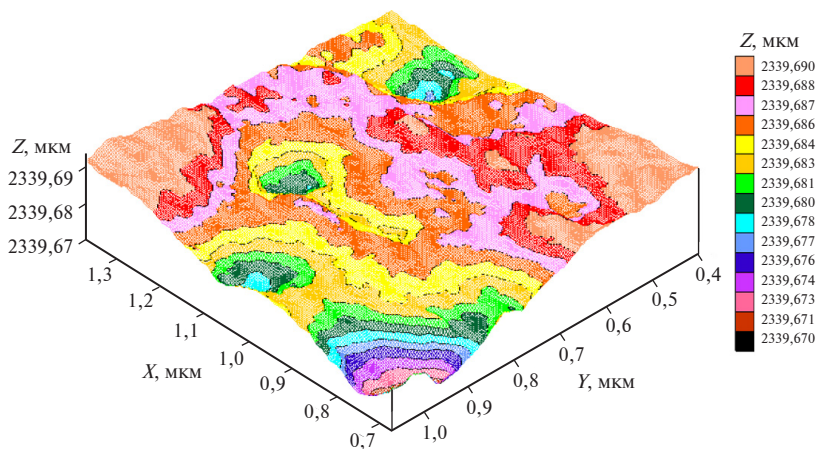


Рис. 4.30. Вид части фрагмента поверхности активированного угля Chemviron SCII, изображенного на рис. 4.29, при увеличении в 150 000 раз

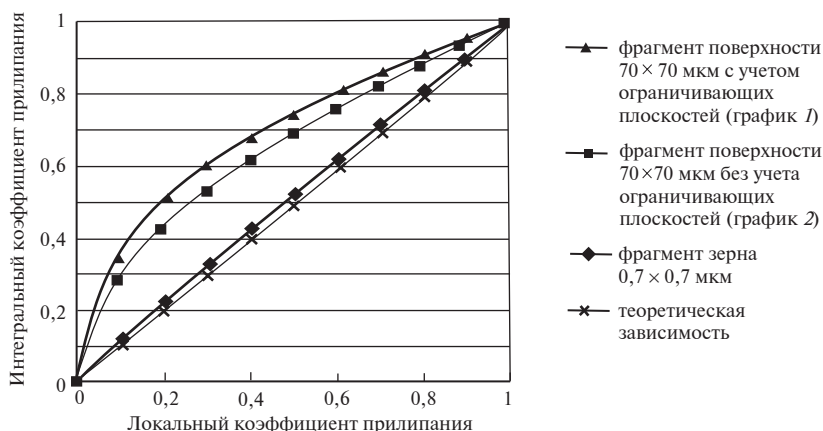
#### 4.2.2. Моделирование фрагмента поверхности

Для моделирования был выбран фрагмент с наибольшим увеличением, изображенный на рис. 4.24. Моделирование поверхности осуществлялось заданием совокупности плоскостей, аппроксимирующих данный фрагмент. В первом приближении структура была упрощена с

трехмерной до двумерной, т. е. был снят характерный разрез и продлен до определенной длины — получился некий шифер.

Далее фрагмент заданной поверхности ограничивался с четырех сторон плоскостями, а с плоскости, находящейся на уровне самого высокого пика структуры, производился пуск частиц. На рис. 4.31 показаны результаты исследования зависимости интегрального коэффициента прилипания от его локального аналога. Исследование проводилось для двух характерных размеров фрагментов: зерна и поверхности. Из результатов видно, что на зерне искажения не слишком сильные, поскольку отношение характерной глубины выбоин в зерне к его размерам крайне мало. Здесь намеренно не применяется термин «пора», потому что поры располагаются между зернами и имеют гораздо большие размеры — порядка сотых или даже десятых долей микрона. Данные о характеристиках различных типов анализируемых сорбентов представлены в табл. 4.3.

Для фрагмента поверхности искажения зависимости уже составляют в некоторых местах 100 % и более (рис. 4.31). Фрагмент поверхности моделировался исходя из данных, полученных с помощью профилометра (с увеличением в 1000 раз). Структура поверхности показана на рис. 4.32. Различие между графиками 1 и 2 состоит в том, что в первом случае ограничивающие поверхности имеют коэффициент прилипания, отличный от нуля, и соответственно откачивают газ, а во втором — не откачивают.



**Рис. 4.31.** Зависимости коэффициента захвата (интегрального коэффициента прилипания) от локального («истинного») коэффициента прилипания для фрагмента поверхности и зерна

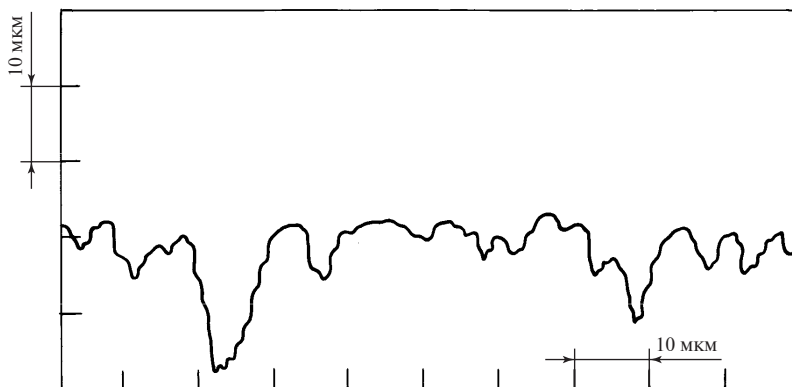


Рис. 4.32. Структура поверхности геттера 4t63, смоделированная с помощью профилометра с увеличением в 1000 раз

Таблица 4.3  
Характеристики поверхностей анализируемых сорбентов  
в соответствии с международным стандартом ISO 4287

Характеристика исследуемого профиля	Тип геттера				
	4t63	5t55	t41	t44	t46
Среднеквадратичное отклонение $R_q$ , нм	10,6	6,536	3,496	3,035	4,839
Среднеарифметическое отклонение $R_a$ , нм	8,179	5,06	2,669	2,643	4,145
Высота десятой точки $R_z$ , нм	47,43	26,65	—	—	—
Максимальная высота $R_{max}$ , нм	59,35	39,1	15,69	12,59	18,34
Средняя ширина элемента $S_m$ , нм	555,2	271,8	—	—	698,6
Локальная ширина элемента $S$ , нм	93,1	61,22	36,5	49,01	60,3
Среднеквадратичный наклон $D_q$ , град	5,831	9,905	4,002	2,626	4,215
Среднеарифметический наклон $D_a$ , град	4,064	6,563	3,18	2,023	3,337
Относительная длина $LO$	1,005	1,014	1,002	1,001	1,003
Длина основания, мкм	26,2	8,164	0,697	1,216	1,362

Таким образом, по результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

- на поверхности зерна, имеющего незначительный по отношению к размерам рельеф, искажения, вносимые неровностями профиля, невелики и составляют около 4—5 %;
- при переходе от фрагментов зерен к фрагментам реальных поверхностей, состоящих из пор с характерными размерами, которые представлены в «паспортных данных» соответствующего сорбента, разница между интегральным и локальным коэффициентами прилипания резко возрастает и достигает иногда 100—150 %. Это обусловлено прежде

всего изменившимся по отношению к фрагменту зерна соотношением размеров проходного сечения пор и их глубин. Характеристики сорбентов таковы, что вышеуказанное соотношение составляет около 2. Такую структуру можно сравнить с цилиндром с одним входом (выходом) и откачивающими стенками.

### **4.3. ВЛИЯНИЕ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ НА ПРОВОДИМОСТЬ**

При анализе вакуумных систем одним из важнейших параметров является проводимость трубопроводов, соединяющих различные элементы системы. Этот показатель зависит от многих факторов, ключевыми из которых являются геометрические характеристики и угловое распределение скоростей. Под геометрическими характеристиками в данном случае подразумеваются как макрогеометрия трубопровода — форма поперечного сечения (круглое, квадратное и др.), размеры, так и микрогеометрия — структура поверхности, с которой непосредственно взаимодействует молекула. Анализ влияния микроструктуры поверхности частично описан в [9].

Вторым ключевым фактором, оказывающим значительное влияние на проводимость, является закон углового распределения скоростей молекулы как на входе в трубопровод, так и внутри него при отражении от внутренней стенки. При расчете проводимости обычно предполагают, что на входе в трубопровод угловое распределение скоростей диффузное, что соответствует присоединению трубопровода к бесконечно большому объему. Внутри трубопровода (при отражении от стенок) также традиционно предполагают наличие диффузного углового распределения.

В данном параграфе рассматривается влияние характера углового распределения скоростей частицы на входе в трубопровод и внутри него на проводимость. Критерием оценки проводимости выбран коэффициент Клаузинга, равный отношению числа частиц, вылетевших через выходное сечение, к числу частиц, влетевших во входное сечение трубопровода. Иначе можно сказать, что коэффициент Клаузинга определяет вероятность того, что частица пролетит сквозь трубопровод.

#### **4.3.1. Описание метода расчетов**

Анализ влияния характера углового распределения скоростей частицы на проводимость (коэффициент Клаузинга) трубопровода производился с использованием метода Монте-Карло пробной частицы для свободномолекулярного режима течения. Подробно этот метод

описан в гл. 1. Здесь приведем лишь суть изменений, внесенных в алгоритм метода для учета различных типов распределений.

Направление вылета частицы с поверхности определяется двумя углами: углом  $\theta$  между траекторией полета и нормалью к касательной плоскости, зависящим от типа распределения (табл. 4.4); углом  $\psi$  поворота направления вылета относительно поперечной вектору нормали оси, который обычно распределен равномерно в пределах  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ .

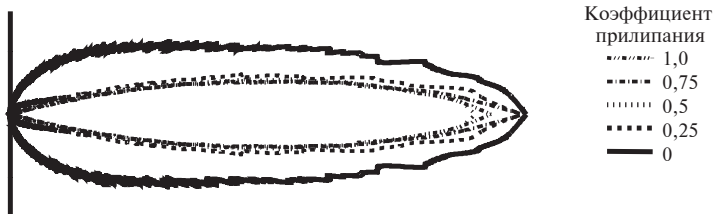
Таблица 4.4  
**Формулы для углов, определяющих  
направление вылета частицы с поверхности,  
 $0 \leq \theta \leq \pi$  и  $0 \leq \psi \leq 2\pi$  ( $\xi$  и  $\chi$  — случайные числа)**

Тип распределения	Формула
Диффузное	$\theta = \arcsin \sqrt{\xi}$
Лепестковое	$\theta = \arccos \sqrt[n+1]{1-\xi}$
Равномерное	$\theta = \arccos \xi$

Примечание. Выражение  $\psi = 2\pi\chi$  — общее для всех типов распределений.

Таким образом, изменяя уравнения для нахождения углов, определяющих направление вылета, можно варьировать характер распределения. Для проверки алгоритма и формул, характеризующих лепестковое распределение, были произведены расчеты значений коэффициента Клаузинга и построены индикатрисы рассеяния частиц при вылете из трубопровода для следующих случаев.

1. Традиционная постановка — на входе в трубопровод и при взаимодействии с внутренними стенками действует диффузный закон (косинусное распределение). Этот расчет выполнялся для проверки качества работы алгоритма сравнением полученных результатов с известными данными [1]. Результаты этого расчета представлены в табл. 4.5. Максимальное отклонение значения коэффициента Клаузинга составило 3 % в диапазоне отношений длины к радиусу, равном 1—20. Индикатрисы рассеяния показаны на рис. 4.33.



**Рис. 4.33. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, при традиционной постановке**

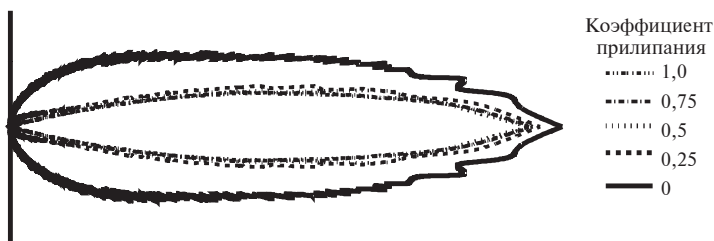


Рис. 4.34. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для лепесткового распределения при  $n = 1$

2. Лепестковое распределение при  $n = 1$ . Диффузное распределение заменялось лепестковым (табл. 4.4) при показателе  $n = 1$ . Подобная замена должна давать такой же диффузный характер распределения углов, определяющих направление полета частицы.

Таблица 4.5  
Сравнение значений коэффициента Клаузинга, полученных программой и найденных Берманом

Традиционная постановка	Отклонение от значений Бермана, %	По Берману
0,6653	0,9941	0,67198
0,51067	0,6923	0,51423
0,35163	1,3882	0,35658
0,2716	1,4013	0,27546
0,218467	3,0328	0,2253
0,18743	1,8640	0,19099
0,13867	1,2190	0,137
0,10693	2,2041	0,10934

Результаты сравнения значений коэффициента Клаузинга для случаев «лепестковое при  $n = 1$ » и «традиционная постановка» показали, что отклонение составляет не более 0,5 % в диапазоне отношений длины к радиусу, равном 1—20. Индикатрисы рассеяния показаны на рис. 4.34.

Таким образом, можно с уверенностью сказать, что выражения для нахождения углов, определяющих направление вылета частицы при лепестковом характере распределения верны.

#### 4.3.2. Влияние закона распределения

Детальное рассмотрение влияния микрогеометрии трубопровода на его проводимость крайне затруднено из-за сложности описания реальной поверхности. Вид структуры реальной поверхности нержавеющей стали, полученной с помощью электронного туннельного микроскопа, показан на рис. 4.35. Легко видеть, что описание такого рельефа в виде, пригодном для использования в процессе моделирования, является отдельной сложной задачей.

Поэтому можно частично заменить анализ влияния микрогеометрии на анализ влияния углового распределения частиц, формируемого реальной поверхностью трубопровода со сложной геометрией. Поскольку угловое распределение зависит от структуры поверхности, взаимодействующей с частицей, подобная замена вполне обоснована. Таким образом, возможно частичное моделирование сложной микрогеометрии реального трубопровода изменением углового распределения частиц, взаимодействующих с его поверхностями.

Однако существуют эффекты, обусловленные определенной геометрией, которые могут вносить в поведение частиц существенные отклонения, поэтому об ее влиянии необходимо помнить.

Методом Монте-Карло пробной частицы рассчитывался коэффициент Клаузинга цилиндрического трубопровода для различных комбинаций угловых распределений как на входе в трубопровод, так и внутри него.

Анализировались следующие распределения: диффузное, равномерное, лепестковое при  $n = 0, 1$  и  $n = 3$ .

Для детальной оценки влияния характера углового распределения на значение коэффициента Клаузинга вид распределения задавался отдельно для входного сечения (процесс влета) и при взаимодействии с внутренними стенками трубопровода. Были выполнены расчеты значений коэффициента Клаузинга для следующих комбинаций распределений внутри элемента:

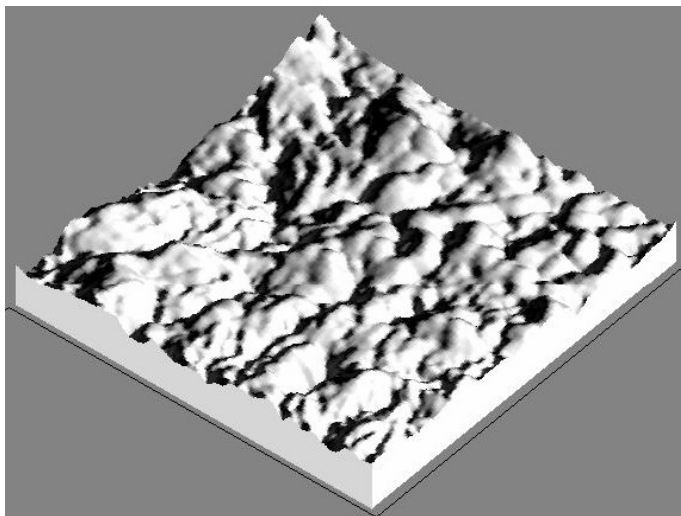


Рис. 4.35. Вид реальной поверхности нержавеющей стали при увеличении в 50 000 раз

- *отличное от диффузного в трубе*. Здесь и далее указывается место, где распределение отлично от диффузного. Например, в данном случае на входе распределение подчиняется косинусному закону, а при взаимодействии с внутренними стенками трубопровода частицы меняют закон отражения на другой (равномерный или лепестковый). Так, формулировка «равномерное в трубе» означает, что на входе в элемент распределение диффузное, а внутри трубопровода — равномерное;
- *отличное от диффузного на входе* — при влете в трубопровод частица имеет отличное от диффузного угловое распределение скоростей, а при взаимодействии с поверхностью трубы — косинусное;
- *отличное от диффузного везде* — как на входе, так и внутри трубопровода частица подчиняется равномерному закону распределения скоростей по углу.

Результаты расчетов зависимости коэффициента Клаузинга от отношения длины к радиусу трубопровода для случая, когда частицы не прилипают к поверхности трубы, приведены в табл. 4.6 ( $\gamma = 0$ ).

Из результатов видно, что основное влияние на значение коэффициента Клаузинга оказывает закон углового распределения при влете в трубопровод; причем в зависимости от характера распределения отклонения значений коэффициента могут быть как в большую (случай «лепестковое на входе»), так и в меньшую (случай «равномерное на входе») стороны.

При этом несмотря на разный характер распределений в случаях для измененного распределения в трубе отклонения невелики (табл. 4.6). Индикатрисы рассеяния частиц при вылете из трубопровода показаны на рис. 4.36—4.44, где используются те же обозначения, что и на рис. 4.33. Для случаев лепесткового распределения они имеют качественно схожий вид, несмотря на существенно разный характер распределения; причем наиболее близкие картины наблюдаются в случаях измененного распределения внутри трубопровода.

Таким образом, на данном этапе можно сделать вывод, что, несмотря на разный характер лепесткового распределения, который задается показателем  $n$ , наличие цилиндрического участка оказывает примерно одинаковое воздействие на структуру индикатрисы рассеяния частиц на выходе.

При равномерном распределении индикатрисы имеют отличную от случаев лепесткового распределения структуру.



### 4.3.3. Влияние значения коэффициента прилипания

Результаты расчета значений коэффициента Клаузинга цилиндрического трубопровода для различных коэффициентов прилипания внутренней поверхности трубы представлены в табл. 4.6. Изменения индикатрисы траекторий частиц, вылетающих через выходное сечение, в зависимости от значения коэффициента прилипания для лепесткового и равномерного распределений соответственно показаны на рис. 4.36—4.44.

При наличии прилипания и увеличении коэффициента прилипания различия между значениями коэффициента Клаузинга для разных типов распределений уменьшаются. В особенности это касается распределений, отличных от диффузного в трубе. Кроме того, изменяются и приводятся к некоторому единому виду индикатрисы рассеяния. Несмотря на существенно разный характер при отсутствии прилипания, с увеличением значения коэффициента прилипания они приобретают качественно схожий вид.



Рис. 4.36. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для лепесткового углового распределения при  $n = 3$  на входе



Рис. 4.37. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для лепесткового углового распределения при  $n = 3$  в трубе

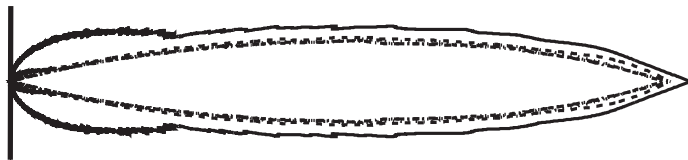


Рис. 4.38. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для лепесткового углового распределения при  $n = 3$  везде

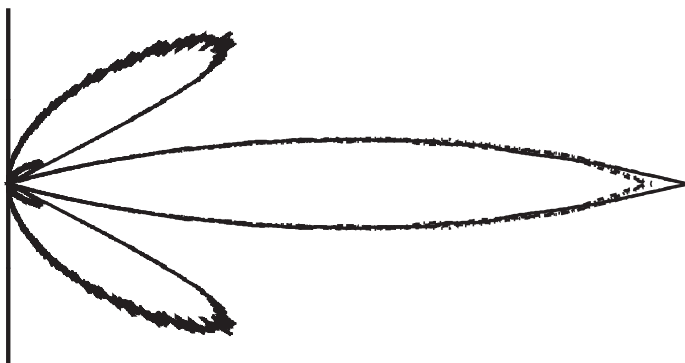


Рис. 4.39. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для лепесткового углового распределения при  $n = 0,1$  на входе

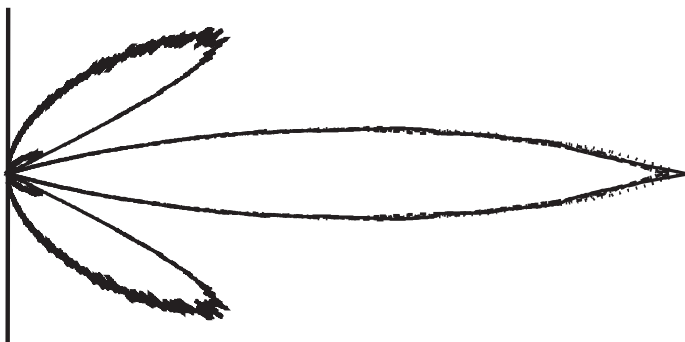


Рис. 4.40. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для лепесткового углового распределения при  $n = 0,1$  в трубе

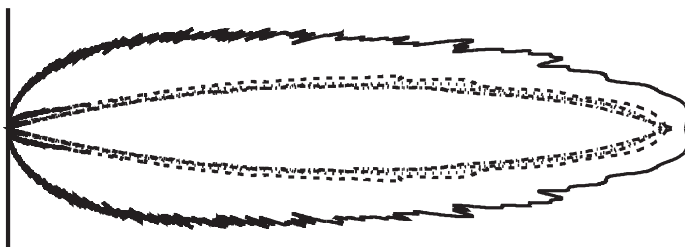


Рис. 4.41. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для лепесткового углового распределения при  $n = 0,1$  везде

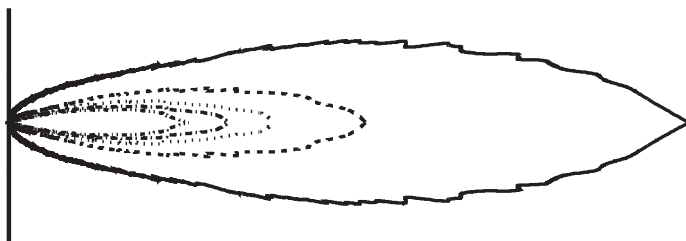


Рис. 4.42. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для равномерного углового распределения на входе

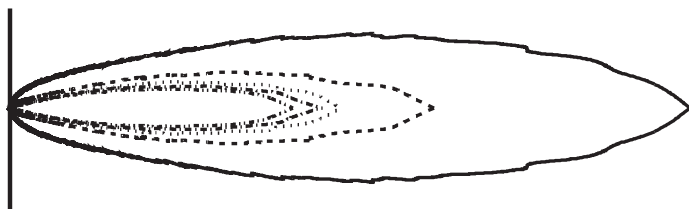


Рис. 4.43. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для равномерного углового распределения в трубе

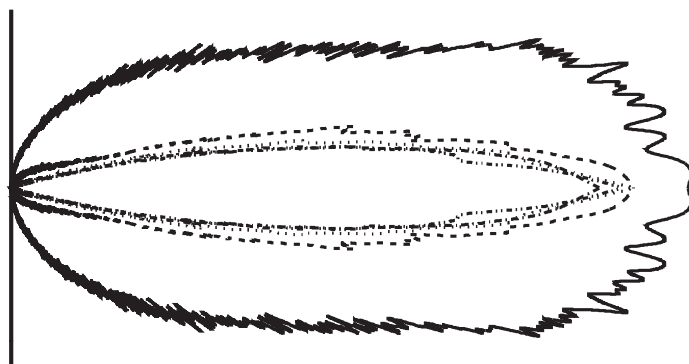


Рис. 4.44. Индикатрисы траекторий молекул, вылетающих из выходного сечения трубопровода, для равномерного углового распределения везде

Необходимо также заметить, что для относительно длинных труб ( $L/R > 5$ ) значения коэффициента Клаузинга очень сильно изменяются относительно случаев без прилипания уже при малых значениях коэффициента прилипания (табл. 4.6) и далее, при увеличении значений коэффициента прилипания, меняются уже не столь значительно. Это, видимо, означает, что для трубопроводов с  $L/R \gg 5$  число соударений частицы со стенками таково, что даже при небольших значениях коэффициента прилипания вероятность прилипнуть для частицы очень высока.

Таким образом, можно сделать вывод, что, каким бы ни был закон отражения (и в особенности на внутренней поверхности трубопровода), при увеличении коэффициента прилипания как значения коэффициента Клаузинга и характер изменения индикатрисы траекторий частиц, вылетающих через выходное сечение, стремятся к некоторым единым показателям.

Таблица 4.6

**Значения коэффициента Клаузинга для различных распределений и коэффициентов прилипания  $\gamma$**

$L/R$	$\gamma$					Тип распределения
	0	0,25	0,5	0,75	1	
1	0,6653	0,56923	0,489567	0,4352	0,38643	Косинусное
2	0,51067	0,352867	0,262267	0,2058	0,17143	
4	0,35163	0,1476	0,090767	0,0672	0,055267	
6	0,2716	0,0713	0,04323	0,02973	0,0282	
8	0,218467	0,0384	0,02067	0,017867	0,0156	
10	0,18743	0,0204	0,012567	0,011467	0,0109	
15	0,13867	0,007167	0,005067	0,0042	0,00413	
20	0,10693	0,003567	0,002467	0,0026	0,002167	
1	0,56953	0,44713	0,35593	0,2818	0,2312	Равномерное везде
2	0,4318	0,269467	0,182467	0,131167	0,095867	
4	0,3134	0,1277	0,068767	0,043567	0,029767	
6	0,24023	0,069767	0,0322	0,020767	0,013267	
8	0,205167	0,0416	0,02103	0,0121	0,00867	
10	0,177567	0,02573	0,01133	0,008133	0,005067	
15	0,1307	0,01053	0,005233	0,0033	0,001967	
20	0,1106	0,00523	0,0024	0,001567	0,001733	
1	0,562867	0,445533	0,3571	0,286867	0,2305	Равномерное на входе
2	0,4113	0,26663	0,178567	0,12533	0,094067	
4	0,2833	0,11013	0,05463	0,038267	0,03083	
6	0,2213	0,0497	0,0228	0,0168	0,01253	
8	0,175667	0,02493	0,0128	0,0082	0,00783	
10	0,14683	0,015267	0,00613	0,00503	0,00567	
15	0,110767	0,004767	0,0025	0,002233	0,002267	
20	0,0845	0,002067	0,001767	0,0013	0,0013	
1	0,676367	0,56723	0,4852	0,429	0,38593	Равномерное в трубе
2	0,5182	0,36073	0,272567	0,21013	0,17373	
4	0,37203	0,17193	0,10253	0,07463	0,0572	
6	0,292367	0,09443	0,0507	0,036467	0,027267	

L/R	$\gamma$					Тип распределения
	0	0,25	0,5	0,75	1	
8	0,248467	0,057067	0,028267	0,0203	0,01583	Равномерное в трубе
10	0,2188	0,033867	0,018467	0,01273	0,010567	
15	0,1656	0,014567	0,0069	0,006167	0,00353	
20	0,133767	0,00743	0,0038	0,0029	0,002467	
1	0,719367	0,6278	0,5533	0,5023	0,452867	Лепестковое при $n = 0,1$ езде
2	0,542767	0,3753	0,28663	0,220567	0,187067	
4	0,36953	0,1402	0,0885	0,0639	0,06123	
6	0,2764	0,059567	0,03473	0,02923	0,026567	
8	0,2231	0,027167	0,018267	0,015633	0,014633	
10	0,186767	0,0136	0,011133	0,010467	0,0098	
15	0,13043	0,00467	0,004867	0,00533	0,0043	
20	0,09923	0,00273	0,002933	0,002567	0,002633	
1	0,71867	0,629733	0,556533	0,498133	0,455433	Лепестковое при $n = 0,1$ на входе
2	0,545867	0,3782	0,28067	0,223067	0,1858	
4	0,3837	0,1623	0,098167	0,069967	0,056633	
6	0,295267	0,075733	0,041233	0,033267	0,026733	
8	0,236967	0,038433	0,023	0,016867	0,015567	
10	0,199733	0,0229	0,0138	0,010533	0,009567	
15	0,142533	0,0073	0,004733	0,005	0,004167	
20	0,116267	0,003867	0,003267	0,002533	0,003067	
1	0,669867	0,576233	0,49013	0,4343	0,3793	Лепестковое при $n = 0,1$ в трубе
2	0,5135	0,347967	0,259967	0,207633	0,1681	
4	0,345733	0,1364	0,0844	0,06567	0,0561	
6	0,260367	0,054867	0,032633	0,0272	0,024533	
8	0,208567	0,0275	0,018633	0,015967	0,015003	
10	0,174767	0,015633	0,0103	0,010267	0,00903	
15	0,123733	0,004867	0,005467	0,0042	0,004767	
20	0,0937	0,00267	0,002567	0,002833	0,002767	
1	0,771467	0,6887	0,628833	0,582567	0,553433	Лепестковое при $n = 3$ езде
2	0,608533	0,445833	0,3713	0,319067	0,292533	
4	0,421967	0,185567	0,13733	0,1154	0,106	
6	0,3244	0,08467	0,063967	0,053467	0,05133	
8	0,266567	0,0457	0,032567	0,031767	0,0296	
10	0,222067	0,026367	0,020967	0,019833	0,0202	
15	0,154767	0,009733	0,008633	0,0084	0,009033	
20	0,123133	0,005167	0,0054	0,0048	0,004833	

L/R	$\gamma$					Тип распределения
	0	0,25	0,5	0,75	1	
1	0,777433	0,695967	0,638933	0,587767	0,5506	Лепестковое при $n = 3$ на входе
2	0,617633	0,4649	0,379533	0,326567	0,297933	
4	0,4395	0,2195	0,147267	0,1204	0,1063	
6	0,342133	0,109967	0,070033	0,0561	0,050233	
8	0,28233	0,060433	0,0411	0,032633	0,029433	
10	0,239567	0,0363	0,024067	0,0214	0,0185	
15	0,177	0,0128	0,010133	0,008833	0,009567	
20	0,138067	0,005733	0,005167	0,0048	0,005	Лепестковое при $n = 3$ в трубе
1	0,666667	0,564733	0,477167	0,4257	0,378533	
2	0,504233	0,327533	0,247833	0,201033	0,172133	
4	0,3388	0,123167	0,078567	0,06133	0,0569	
6	0,261567	0,05	0,0342	0,027367	0,025433	
8	0,2064	0,024467	0,01833	0,015267	0,0154	
10	0,170567	0,0127	0,010467	0,01	0,010633	
15	0,120367	0,005467	0,004533	0,004567	0,004633	
20	0,089733	0,0025	0,003	0,003067	0,002567	

**Выводы.** Основное влияние на значение коэффициента Клаузинга цилиндрического трубопровода и на характер индикатрисы траекторий частиц, вылетающих через выходное сечение, оказывает тип углового распределения на входе в трубопровод. Это влияние уменьшается с увеличением коэффициента прилипания внутренней поверхности трубы.

Характер углового распределения при отражении от внутренней стенки трубопровода незначительно влияет на коэффициент Клаузинга. Влияние увеличивается с ростом отношения длины к радиусу.

Индикатрисы траекторий частиц, вылетающих через выходное сечение, в случаях, отличных от диффузного углового распределения на внутренней стенке трубы, имеют качественно схожий вид. Это еще раз подтверждает гипотезу об основополагающем влиянии характера углового распределения на входе и о незначительном по сравнению с ним влиянии типа углового распределения внутри трубы.

#### 4.4. АНАЛИЗ КРИОВАКУУМНЫХ УСЛОВИЙ В ЗОНЕ ВАКУУМНОЙ ИЗОЛЯЦИИ КАТУШЕК ТОРОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ ITER

Для обеспечения необходимых температурных и вакуумных условий работы система катушек тороидального поля (TFC) ITER оборудована многоступенчатой системой вакуумной изоляции (VVTs).

Тепловая изоляция вакуумной камеры предназначена для ограничения тепловых потоков, падающих от «теплой» вакуумной камеры (VV) на катушки сверхпроводящей электромагнитной системы установки.

В зазоре между TFC и VV располагается VVTS. Она представляет собой стальную тонкую оболочку, повторяющую форму вакуумной камеры. Конструктивно тепловая защита состоит из внутренней и внешней частей.

В данном параграфе проведем анализ влияния остаточной газовой среды на процессы теплообмена в зонах системы вакуумной изоляции катушек тороидального поля ITER.

#### **4.4.1. Физические предпосылки и методология расчета**

Анализируемая вакуумная структура в целом является термодинамически неравновесной. Строго говоря, это делает некорректными традиционные методы расчетов, базирующихся на использовании осредненных параметров состояния разреженной газовой среды (давление, температура) и зависящих от них количественных характеристик вакуумного оборудования (проводимость, быстрота откачки и т.п.).

Использование адекватных методов расчета, напротив, ориентировано на построение трехмерных полей дифференциальных характеристик газовой среды (молекулярной концентрации, плотностей молекулярных потоков и др.). Последовательное применение этих методов вызвало бы, однако, некоторые негативные последствия. Во-первых, оно привело бы к практически неоправданной избыточности получаемой информации. Во-вторых, вызвало бы затруднения при ее интерпретации с позиции конечной цели проектанта: оценить, насколько существенно влияние остаточной газовой среды на процессы теплообмена в криогенной области температур.

С учетом указанных обстоятельств при выполнении расчетов реализован комбинированный подход. При анализе молекулярного переноса в узких полостях, стенки которых имеют существенно разную температуру, применялись методы статистических испытаний (Монте-Карло) и эквивалентных поверхностей. В свою очередь, в приложении к изотермическим конструктивным элементам использовались «классические категории» и соотношения вакуумной техники (проводимость, перепад давлений и т. п.).

Как показывает многолетний опыт, разумное применение комбинированного метода расчета сложных неравновесных структур не приводит к существенным погрешностям. При расчете систем с распределенной газовой нагрузкой и ограниченным числом стоков газа, подобных анализируемой, погрешности составляют 5—7 % (иногда

10 %). При анализе структур, содержащих большое число сорбирующих поверхностей, погрешности могут достигать 15—25 %. И лишь в крайне редких случаях, в зонах скачкообразной геометрической трансформации анализируемых структур, погрешности возрастают до 150—200 %.

В сравнении с разбросом начальных значений десорбционной газовой нагрузки, который для рассматриваемой системы может достигать порядков данной величины, приведенные выше значения возможных погрешностей пренебрежимо малы.

#### 4.4.2. Общие условия расчетов

Все расчеты осуществлялись методом Монте-Карло пробной частицы. Часть из них потребовала применения классических соотношений вакуумной техники и метода эквивалентных поверхностей. В описаниях расчетов, где использовались данные подходы, есть соответствующие упоминания.

Проводился анализ распределения давления внутри межстенного пространства для следующих зон системы вакуумной изоляции:

- вакуумная камера — тепловой экран (VV—VVTS);
- межстенное пространство внутри теплового экрана (VVTS);
- тепловой экран — система катушек тороидального поля (VVTS—TFC).

Данный расчет проводился с учетом дополнительного потока молекул из полости теплового экрана через перфорацию внутрь зоны VVTS—TFC.

Оценивались следующие температурные состояния:

- все элементы находятся при комнатной температуре;
- два эксплуатационных режима:  
нормальный режим: VV — при 420 К; TFC — при 4 К; VVTS — при 80—120 К;  
нагрев вакуумной камеры: VV — при 520 К; TFC — при 4 К; VVTS — при 80—120 К.

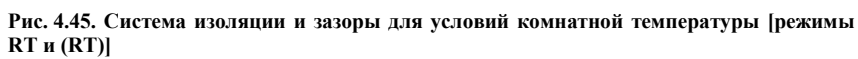
Во всех расчетах использовались геометрические размеры, приведенные на рис. 4.45 и 4.46. Температурные режимы, для которых проводились расчеты, показаны в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Температурные режимы, К, для которых проводились расчеты

Режим	Зона		
	VV—VVTS	VVTS	VVTS—TFC
RT, (RT)	300 — 300	300 — 300	300 — 300
OT, (OT)	420 — 120	120 — 80	80 — 4
	520 — 120		





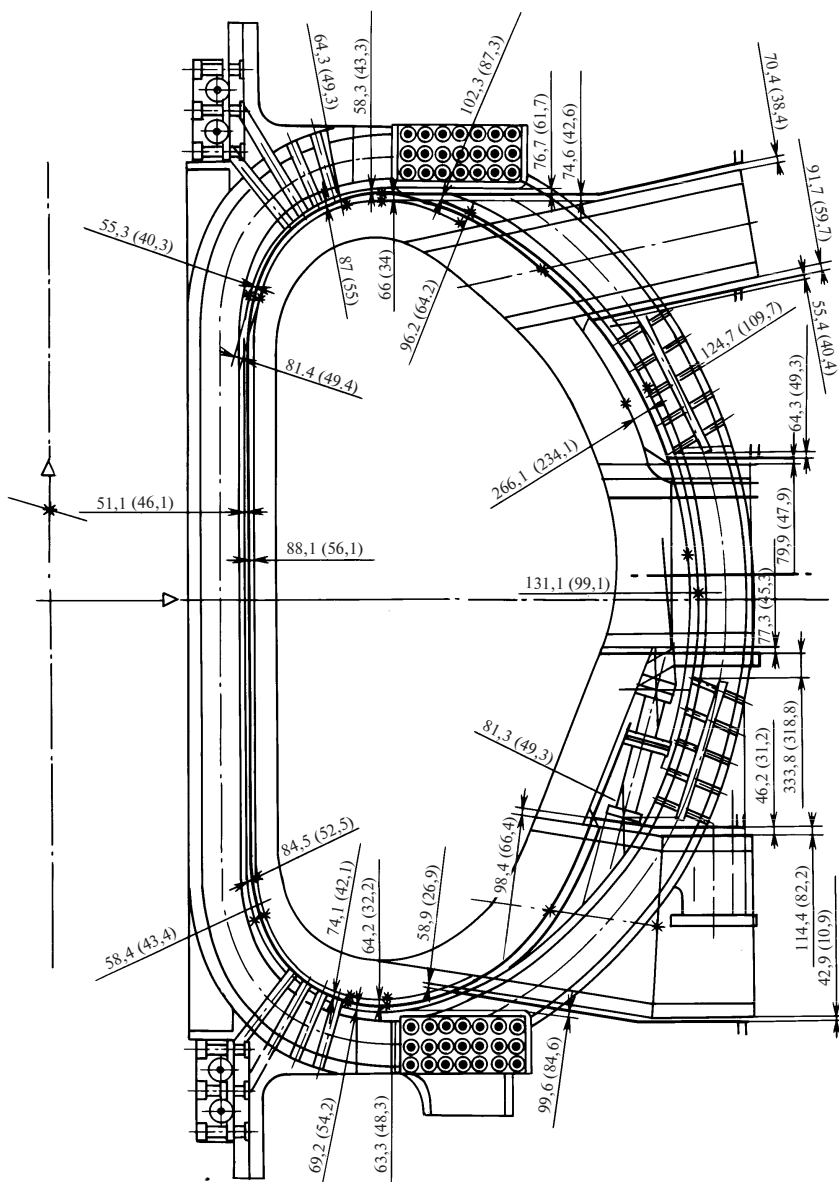


Рис. 4.46. Система изоляции и зазоры в рабочем режиме [режимы ОТ и (ОТ)]

В качестве единственного источника газовой нагрузки рассматривались десорбционные потоки водорода. Базовая удельная скорость газовыделения при температуре 80 К принималась равной

$1,33 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3 \cdot \text{Па} / (\text{с} \cdot \text{м}^2)$ , что эквивалентно корпускулярному потоку  $1,20 \cdot 10^{14} \text{ 1} / (\text{с} \cdot \text{м}^2)$ . Эта величина соответствует плотности десорбционного потока от поверхности высококачественной нержавеющей стали после ее продолжительной термовакuumной тренировки и близка к плотности десорбционного потока от поверхности полиамидной пленки. Для температур, отличных от 80 К, десорбционные потоки рассчитывались исходя из близкого к экспоненциальному закона (табл. 4.8).

Таблица 4.8

Значения плотности десорбционного потока для разных температур

$T, \text{ К}$	$v_c, \text{ м/с}$	$q \cdot 10^7, \text{ м}^3 \cdot \text{Па} / (\text{с} \cdot \text{м}^2)$	$q \cdot 10^{-15}, \text{ 1} / (\text{с} \cdot \text{м}^2)$
80	917	1,33	0,12
120	1124	2,1	0,19
300	1777	13,3	1,2
420	2102	45,3	4,1
520	2339	13,3	12

При моделировании эти потоки учитывались следующим образом. Для каждой поверхности, составляющей систему, была рассчитана площадь, далее с учетом температуры этой поверхности находили плотность потока частиц. Значение полного потока от данной поверхности  $Q_i$  [1/с] вычисляли как произведение плотности потока для этой поверхности на ее площадь:

$$Q_i = q_i F_i.$$

Сложив потоки молекул от всех поверхностей, получали поток газа, натекающего в систему. Общее число пробных частиц ( $N = 1000$  или  $N = 10\,000$ ) выражает значение потока газа, натекающего в систему. С каждой из поверхностей, составляющих систему, запускалось число частиц, пропорциональное доле потока от данной поверхности по отношению к потоку натекающего газа:

$$\frac{N_i}{N} = \frac{Q_i}{Q} \Rightarrow N_i = \frac{Q_i}{Q} N.$$

С нагретой поверхности, естественно, стартовало больше частиц, чем с холодной, и полный поток зависел не только от площадей поверхностей системы, но и от их температур.

Площади поверхностей, составляющих систему, равны:

1850 м<sup>2</sup> — для вакуумной камеры;

1980 м<sup>2</sup> — для экрана (считая внутреннюю часть полости);

1980 м<sup>2</sup> — для экрана (считая внешнюю часть полости);

1273 м<sup>2</sup> — для катушки;

1400 м<sup>2</sup> — для внутренней (внешней) полости экрана.

#### 4.4.3. Расчет проводимости патрубков VVTS и лабиринтных соединений

Под термином «патрубок VVTS» понимаются каналы, по которым происходит откачка газа из межстенного пространства всех зон. Патрубок VVTS представляет собой систему, состоящую из двух коаксиальных цилиндров, которые одной стороной прикрепляются к откачиваемой зоне, а другой — через лабиринтные соединения к системе откачки. На рис. 4.47 и 4.48 показаны схемы лабиринтных соединений для условий комнатной и рабочей температур соответственно.

Аналогично подходу, использованному при определении межстенных зазоров системы вакуумной изоляции, задаются размеры лабиринтных соединений. На рис. 4.47 и 4.48 показан один «плавающий» размер (230 — 200 мм), определяющий значение зазора (50—80 мм). Таким образом, размеры лабиринтного соединения для комнатной температуры (см. рис. 4.47) и «плавающего» размера 200 мм (зазор 80 мм) соответствуют режиму RT, а для «плавающего» размера 230 мм (зазор 50 мм) — режиму (RT), аналогично для рабочей температуры (см. рис. 4.48) и «плавающего» размера 200 мм (зазор 80 мм) — режиму OT, для рабочей температуры (см. рис. 4.48) и «плавающего» размера 230 мм (зазор 50 мм) — режиму (OT).

Для расчета всей системы патрубков VVTS (коаксиальные цилиндры + лабиринтные соединения) лабиринтные соединения были заменены на эквивалентные поверхности, имеющие коэффициенты прилипания, равные коэффициентам Клаузинга соответствующих лабиринтных соединений (рис. 4.49).

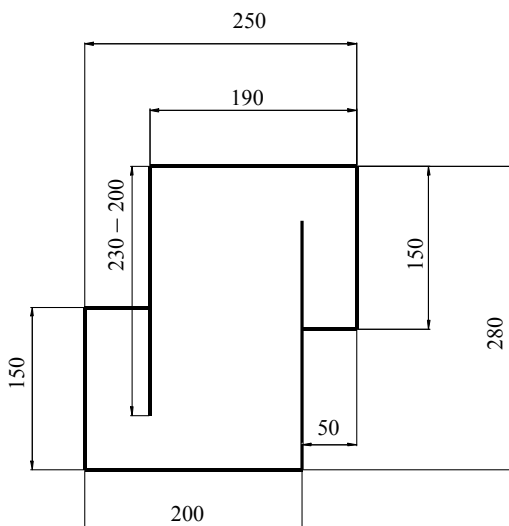


Рис. 4.47. Схема лабиринтных соединений для условий комнатной температуры

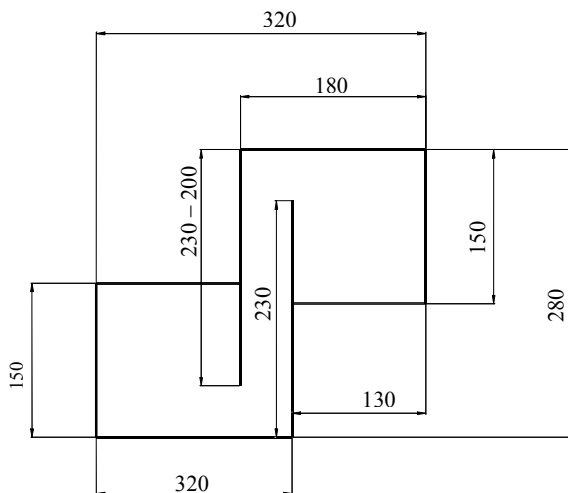


Рис. 4.48. Схема лабиринтных соединений для условий рабочей температуры

При сопряжении лабиринтных соединений с коаксиальными цилиндрами использовались размеры, рекомендуемые для соответствующих режимов (см. рис. 4.45 и 4.46).

Значения результирующего коэффициента Клаузинга для всей системы патрубков VVTS для разных режимов приведены в табл. 4.9.

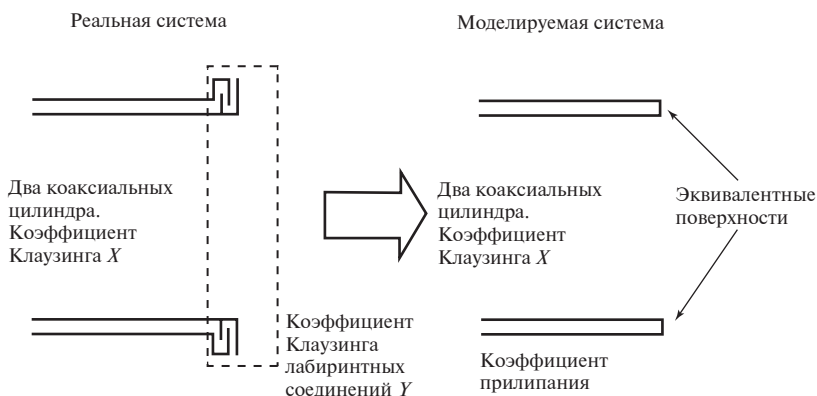


Рис. 4.49. Схема для расчета системы патрубков VVTS

Таблица 4.9

Значения коэффициента Клаузинга патрубков VVTS

Патрубок	Режим	Коэффициент Клаузинга
Верхний	RT	0,05051
	OT	0,04149
	(RT)	0,03597
	(OT)	0,02868
Средний	RT	0,07395
	OT	0,06378
	(RT)	0,0555
	(OT)	0,04826
Нижний	RT	0,06644
	OT	0,0499
	(RT)	0,04852
	(OT)	0,0232

#### 4.4.4. Расчет распределения давления

**Общие условия.** Реальная система вакуумной изоляции состоит из нескольких секторов, составляющих тороидальную структуру. Каждый из этих секторов имеет свои патрубки VVTS для откачки газа из полостей данного сектора. Моделируемая система имеет упрощенную по отношению к реальной структуру и состоит из множества усеченных конусов (рис. 4.50), составляющих несколько вложенных друг в друга тороидальных структур, в межстенном пространстве которых анализируется распределение давления.

Патрубки VVTS также упрощаются. Реальный патрубок в месте присоединения к тору имеет структуру двух коаксиальных трубопроводов. Через их межстенное пространство откачиваемый газ, проходя через лабиринтные соединения, попадает в систему откачки. В моделируемой системе кольцообразная щель, которая образуется при присоединении патрубка к тору, преобразуется в две прямоугольные, т. е. как бы «разворачивается» (рис. 4.51). Эти прямоугольные щели являются частями конусов, составляющих моделируемую систему (см. рис. 4.50), имеют протяженность по всему периметру тора и коэффициент прилипания, равный коэффициенту

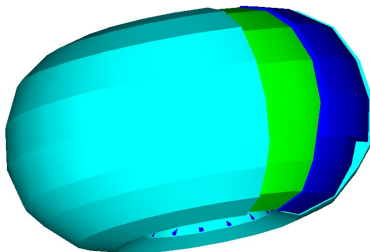


Рис. 4.50. Структура моделируемой системы

Клаузинга соответствующего патрубка. Таким образом, каждый патрубок при моделировании заменяется двумя прямоугольными (откачивающими) щелями. Коэффициенты прилипания откачивающих щелей равны коэффициентам Клаузинга соответствующих патрубков в определенных условиях [RT, (RT), ОТ и др.]. Площадь данных щелей (около  $20 \text{ м}^2$ ) неизменна. В зависимости от режима меняются только коэффициенты прилипания.

Для анализа распределения давления вся система разбивалась на области. Расположение этих областей одинаково для всех анализируемых зон (VV—VVTS, VVTS, VVTS—TFC) (рис. 4.52).

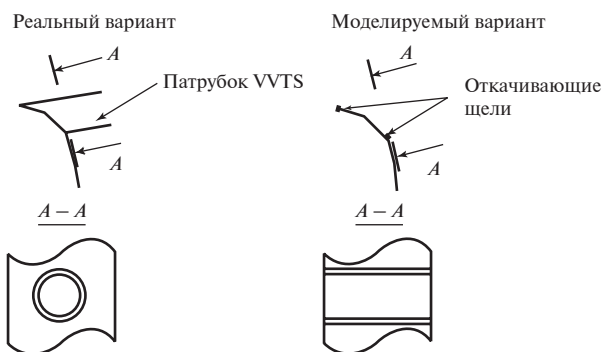


Рис. 4.51. Схема преобразования реальных патрубков VVTS в откачивающие щели

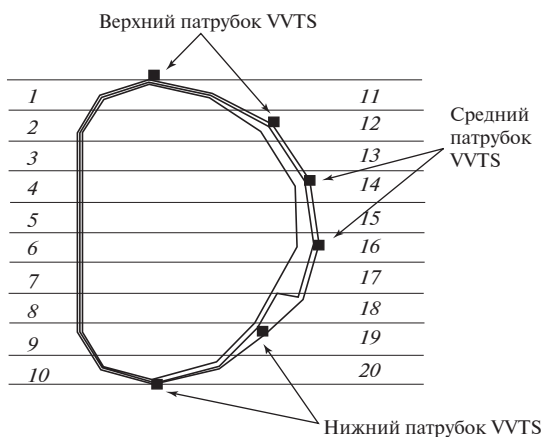


Рис. 4.52. Схема областей (1—20), на которые разбивалась анализируемая система

В итоге были получены значения давления при температуре 80 К с учетом фонового давления. Значения фонового давления для всех режимов рассчитывались отдельно с использованием известных соотношений вакуумной техники.

**Расчет фонового давления.** Для получения значений фонового давления были рассчитаны проводимости патрубков VVTS и общая быстрота откачки газа из областей разных зон. Проводимости и общая быстрота откачки определялись для температуры газа, равной 80 К.

Значения фоновых давлений вычислялись с использованием соотношения

$$p_2 = \frac{Q}{U_{\text{общ}}} + p_1.$$

В качестве  $U_{\text{общ}}$  использовалась общая быстрота откачки в соответствующих режимах. Значение  $Q$  в данном соотношении измеряется в Па·м<sup>3</sup>/с, поэтому имеющиеся значения  $Q'$  в 1/с преобразовывались следующим образом:

$$Q = Q' k T.$$

Здесь  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана;  $T$  — температура (для всех вычислений  $T = 80$  К). Значения фонового давления для разных зон и режимов приведены в табл. 4.10.

Таблица 4.10

**Значения фонового давления для разных режимов и зон**

Режим	$S_{\text{общ}}, \text{ м}^3/\text{с}$	Фоновое давление, Па·10 <sup>-4</sup> , для зоны		
		VV—VVTS	VVTS—TFC	VVTS
RT	298	1,17	1,27	1,39
OT	242,2	1,36	1,03	1,05
OT*	242,2	2,03	—	—
(RT)	218,5	1,23	1,51	1,75
(OT)	156,3	1,56	1,05	1,08
(OT)*	156,3	2,59	—	—

\*Данные соответствуют температурному режиму 520 — 120 К.

**Зона VV—VVTS.** Температурные режимы и значения десорбционных молекулярных потоков, которые анализировались для данной зоны, представлены в табл. 4.11.

Таблица 4.11

**Значения десорбционных молекулярных потоков в зоне VV—VVTS для разных анализируемых режимов**

Режим	$T_{\text{VV}}, \text{ К}$	$T_{\text{VVTS}}, \text{ К}$	$Q, \text{ л/с} \cdot 10^{18}$
RT, (RT)	300	300	4,60
OT, (OT)	420	120	7,96
OT, (OT)	520	120	2,26



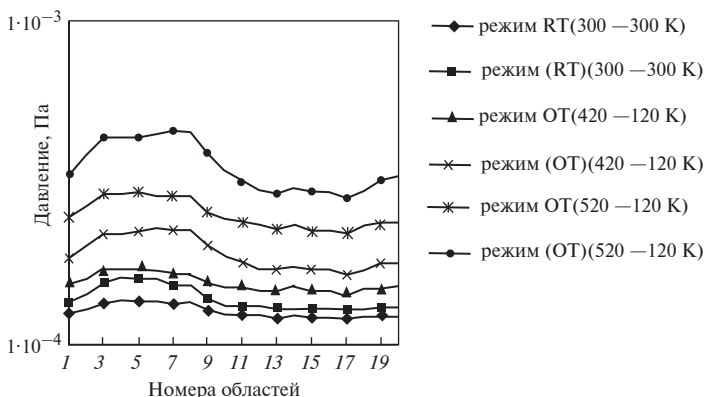


Рис. 4.53. Распределение давления внутри зоны VV—VVTS

Результаты расчетов распределения давления для указанных условий приведены на рис. 4.53.

**Зона VVTS.** Расчет распределения давления внутри теплового экрана проводился следующим образом. На внешней стенке экрана, обращенной к катушке, «прорезались» щели (перфорации), аналогичные щелям патрубков VVTS. Поскольку эти щели находятся вблизи патрубков VVTS, присоединенных к зоне VVTS—TFC, коэффициенты прилипания поверхностей щелей перфорации принимались равными коэффициентам прилипания поверхностей щелей соответствующих патрубков VVTS. Площадь сечений щелей принималась около 0,7 % общей площади полостей экрана (2800 м<sup>2</sup>). Температурные режимы и значения десорбционных молекулярных потоков, которые анализировались для данной зоны, приведены в табл. 4.12.

Таблица 4.12  
Значения десорбционных молекулярных потоков в зоне VVTS для разных анализируемых режимов

Режим	$T_{VVTS1}, K$	$T_{VVTS2}, K$	$Q, 1/c \cdot 10^{18}$
RT, (RT)	300	300	3,36
OT, (OT)	120	80	0,434

Результаты расчетов распределения давления для указанных условий представлены на рис. 4.54.

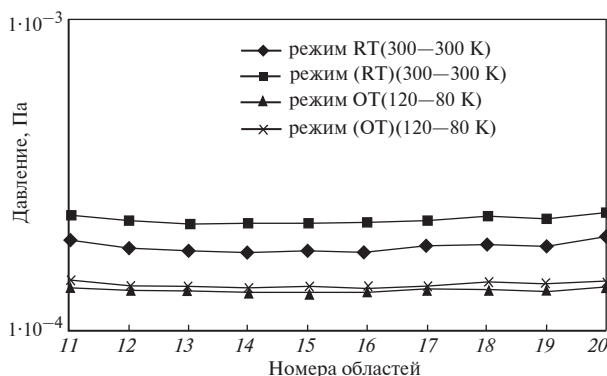


Рис. 4.54. Распределение давления внутри зоны VVTS

**Зона VVTS—TFC.** Распределение давления внутри зоны VVTS—TFC рассчитывалось с учетом дополнительного молекулярного потока, натекающего через перфорацию из полости теплового экрана; причем каждому режиму зоны VVTS—TFC отвечал молекулярный поток из полостей экрана для соответствующего режима. Температурные режимы и значения десорбционных молекулярных потоков, которые анализировались для данной зоны, приведены в табл. 4.13.

Результаты расчетов распределения давления для указанных условий представлены на рис. 4.55.

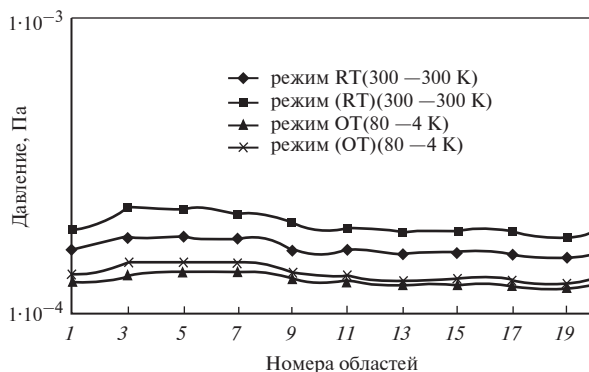


Рис. 4.55. Распределение давления внутри зоны VVTS—TFC

Таблица 4.13

**Значения десорбционных молекулярных потоков в зоне VVTS — TFC для разных анализируемых режимов**

Режим	$T_{VV}$ , К	$T_{VVTS}$ , К	$\underline{Q}$ , $1/\text{с} \cdot 10^{18}$
RT, (RT)	300	300	7,26
OT, (OT)	80	4	0,743

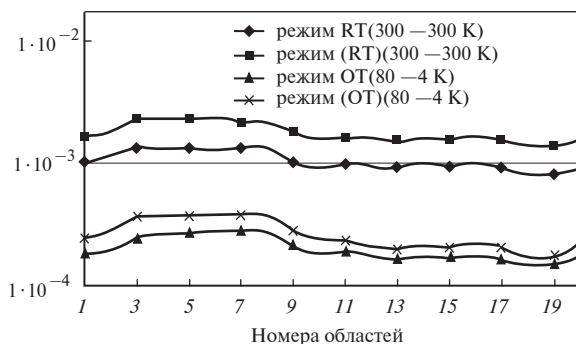
**Зона VVTS—TFC с увеличенным значением плотности десорбционного потока от поверхности TFC.** Проводился расчет распределения давления внутри зоны VVTS — TFC при увеличенном на два порядка значении плотности десорбционного потока от поверхности катушек. Поверхность катушек выполняется из полиамидной пленки, и плотность десорбционного потока с них может существенно превышать плотность десорбционного потока от других частей системы.

Таким образом, плотность десорбционного потока для полиамидной пленки была увеличена до  $1,33 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{м}^3 / (\text{с} \cdot \text{м}^2)$  при 80 К. Значения фонового давления в зонах VVTS и VVTS — TFC приведены в табл. 4.14.

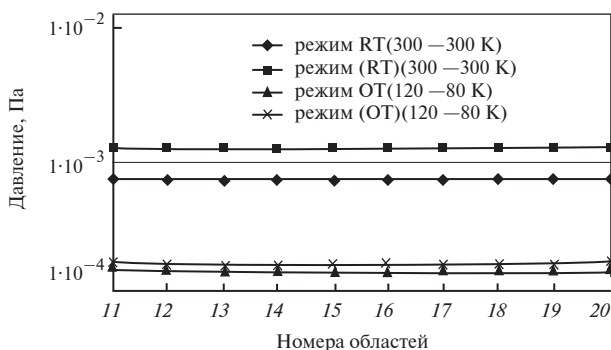
Таблица 4.14

**Значения фонового давления при увеличенной плотности десорбционного потока от поверхности TFC**

Режим	$S_{\text{общ.}}$ , $\text{М}^3/\text{с}$	Фоновое давление, $\text{Па} \cdot 10^{-4}$ , в зоне	
		VVTS—TFC	VVTS
RT	298	6,873	6,997
OT	242,2	1,356	1,375
(RT)	218,5	12,20	12,43
(OT)	156,3	1,551	1,582



**Рис. 4.56. Распределение давления внутри зоны VVTS—TFC при увеличенном значении плотности десорбционного потока от поверхности TFC**



**Рис. 4.57.** Распределение давления внутри зоны VVTS при увеличенном значении плотности десорбционного потока от поверхности TFC

Распределения давления внутри зон VVTS—TFC и VVTS с учетом фонового давления показаны на рис. 4.56 и 4.57.

**Выводы.** В результате работы, описанной в данном параграфе, были получены исчерпывающие данные как о структуре распределения, так и о возможных значениях давления внутри анализируемых зон системы вакуумной изоляции катушек тороидального поля ITER для заданных значений плотности десорбционного потока. Эти данные позволяют проектировщикам сделать вывод о целесообразности проведения структурной оптимизации системы и при необходимости вычленив части системы, особенно нуждающиеся в подобной оптимизации.

Рассмотрены два подхода к определению дифференциальных характеристик сложных вакуумных систем на примере решения двух актуальных задач. В результате решения первой задачи показано, что конфигурация стандартной испытательной камеры может оказывать заметное влияние на результаты измерения давления в ней и соответственно на получаемое значение быстроты действия анализируемого насоса. Использованный подход показал высокую степень достоверности и эффективность применения его для решения задач в равновесной постановке, в которых требуется определение дифференциальных характеристик газовой среды в пристенной области.

В результате решения второй задачи получены обширные данные по структуре пространственного распределения молекулярной кон-

центрации и приведенного давления внутри системы вакуумной изоляции катушек тороидального поля ITER, находящейся в существенно неравновесных условиях. Впервые для наиболее точного описания десорбционных процессов, формирующих газовую среду, была использована методика моделирования квазипостоянного напуска газа в систему. Полученные данные переданы проектировщикам ITER.

## Глава 5

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СМЕЖНЫХ ЗАДАЧ ВАКУУМНОЙ ТЕХНИКИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОМОЛЕКУЛЯРНОГО ЭФФЕКТА

В процессе разработки криовакуумных систем возникают трудности расчета молекулярных потоков, обусловленные наличием поверхностей, находящихся при существенно разных температурах. Например, часто бывает невозможно измерить давление в «холодной» зоне путем непосредственного помещения в нее манометрического преобразователя давления, что приводит к необходимости оценки отношения давлений в объемах, находящихся при различных температурах в условиях высокого разрежения ( $K_n \gg 1$ ).

Пусть два объема соединены между собой посредством диафрагмы, размер которой мал по сравнению со средней длиной свободного пробега, т. е. число  $K_n \gg 1$ . В этом случае молекулы свободно перемещаются через диафрагму, причем каждая молекула приходит в другой объем с той же энергией, которой она обладала до этого. Средняя энергия молекул при термодинамическом равновесии определяется температурой. Поэтому переход молекул из одного объема в другой должен приводить к выравниванию температур. Говорить об определенной температуре газа каждого объема можно только в том случае, когда диафрагма достаточно мала и установление термодинамического равновесия в каждом объеме происходит гораздо быстрее, чем выравнивание температур этих объемов. Для стационарного состояния можно приравнять между собой потоки молекул, пролетающих через диафрагму в единицу времени из первого сосуда во второй и из второго сосуда в первый. Для нашего случая ( $K_n \gg 1$ ) можно записать следующее соотношение:

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad (5.1)$$

где  $n_1, n_2$  — концентрации молекул в сосудах;  $T_1, T_2$  — температуры стенок сосудов.

Учитывая, что давление выражается формулой  $p = nkT$ , получаем

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \quad (5.2)$$

Явление температурной транспирации было открыто Рейнольдсом. Затем его изучали Кнудсен, Кеезом, Вебер как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Данный эффект имеет ряд важных применений:

- абсолютный вакуумметр Крукса;
- термоаккомодационный насос Хобсона;
- микромеханический кнудсеновский компрессор;
- система регулирования пограничного слоя на крыльях дозвуковых самолетов;
- система забора проб среды в измерительную камеру масс-спектрометра с уровня атмосферного давления;
- система расчета давления в «холодной» зоне по показаниям преобразователя давления, расположенного в «теплой» зоне.

Широкие возможности, в частности для микромеханических применений, открываются в связи с тем, что современные технологии позволяют получать каналы очень малого диаметра (до 50 нм). Мембрана из нейлона имеет до 50 % открытой площади по сечению. Так как диаметр канала меньше, чем длина свободного пробега при атмосферном давлении, есть возможность использовать подобные мембраны в качестве компрессора или вакуумного насоса.

В данной главе с помощью расчетов определим границы применения термомолекулярного соотношения и опишем физический эксперимент по исследованию термомолекулярного эффекта для вакуумных систем, имеющих различные геометрические характеристики, и газов.

### **5.1. РАСЧЕТ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ СФЕР, СОЕДИНЕННЫХ ДИАФРАГМОЙ**

Для двух сфер, соединенных диафрагмой (рис. 5.1), проводились расчеты коэффициентов температурной транспирации при разных соотношениях диаметров диафрагмы и сфер. Результаты этих расчетов представлены на рис. 5.2. Температуры сфер составляли 300 и 78 , а также 300 и 4 К, однако значения коэффициента температурной транспирации от изменения соотношения температур менялись незначительно.

Из рис. 5.2 видно, что при увеличении отношения  $d_d/D_{сф}$ , т. е. при увеличении размера диафрагмы, коэффициент температурной транспирации повышается от 0,5 до примерно 0,8.

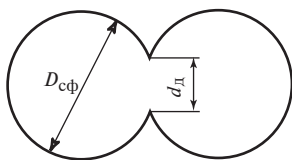


Рис. 5.1. Схема системы для моделирования случая двух сфер

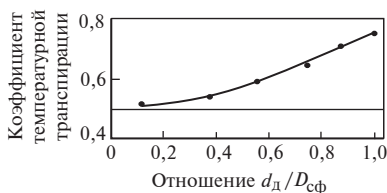


Рис. 5.2. Изменение коэффициента температурной транспирации в зависимости от отношения диаметров диафрагмы  $d_{д}$  и сферы  $D_{сф}$

При моделировании для расчета одного значения коэффициента температурной транспирации проводилось не менее 100 000 испытаний (пробных частиц), поэтому погрешность в данном случае не превышала 1 %.

Таким образом, из анализа полученных результатов можно сделать следующий вывод: изменение соотношения диаметров диафрагмы и сфер значительно влияет на коэффициент температурной транспирации, причем при увеличении размера диафрагмы увеличивается и коэффициент температурной транспирации.

## 5.2. РАСЧЕТ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ СФЕР, СОЕДИНЕННЫХ ТРУБОЙ

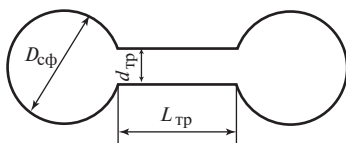


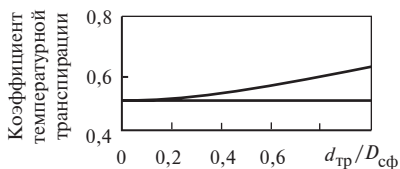
Рис. 5.3. Схема для моделирования случая двух сфер, соединенных трубой

Для двух сфер, соединенных трубой (рис. 5.3), были проведены расчеты значений коэффициента температурной транспирации в зависимости от характера распределения температуры, а также от геометрических характеристик системы.

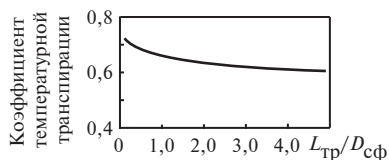
## 5.3. ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Под влиянием геометрических характеристик в данном случае понимается степень зависимости коэффициента температурной транспирации от соотношения основных геометрических параметров системы, таких как  $D_{сф}$ ,  $d_{тр}$ ,  $L_{тр}$  (см. рис. 5.3). Зависимость коэффициента температурной транспирации от соотношения диаметров трубы и сферы показана на рис. 5.4. Из рисунка видно, что характеры зависимостей для рассматриваемого случая и для случая двух сфер, соединенных диафрагмой, идентичны. При уменьшении диаметра трубы,





**Рис. 5.4.** Зависимость коэффициента температурной транспирации от отношения диаметра трубы к диаметру сферы



**Рис. 5.5.** Зависимость коэффициента температурной транспирации от длины трубы для случая  $d_{тр} = D_{сф}$

как и при уменьшении размера диафрагмы, значение коэффициента температурной транспирации стремится к 0,5. Однако для случаев с максимальными диаметрами трубы и диафрагмы наблюдается значительное различие коэффициентов температурной транспирации — для двух сфер он составляет около 0,8, а для сфер, соединенных трубой, — 0,65, что можно объяснить неодинаковыми структурами систем и соответственно разным поведением частиц. В случае двух сфер частицы сильно перемешиваются, потому что взаимодействию частиц из разных полусфер (именно такой вид приобретают сферы, соединенные большой диафрагмой) ничего не мешает. В случае сфер, соединенных трубой, взаимодействию частиц мешает цилиндр, поэтому степень их перемешивания заметно ухудшается, что, в свою очередь, влияет на коэффициент температурной транспирации.

Зависимость коэффициента температурной транспирации от длины трубы для системы двух сфер, соединенных трубой, при  $d_{тр} = D_{сф}$  представлена на рис. 5.5. Легко видеть, что при уменьшении длины происходит плавный переход к случаю сфер, соединенных диафрагмой, и к соответствующему значению коэффициента температурной транспирации (около 0,8). Надо сказать, что уже при  $L_{тр}/D_{сф} = 1$  отличие значения коэффициента температурной транспирации от случая  $L_{тр}/D_{сф} = 5$  составляет 3 %, поэтому можно сделать вывод, что основное влияние на характер взаимодействия частиц оказывают даже короткие трубопроводы.

Основные варианты распределений температуры по структуре, для которых производились расчеты, показаны на рис. 5.6.

Для случая, приведенного на рис. 5.6, а, а также его производных (температура трубы может быть произвольной) все представленные выше результаты расчетов полностью верны, а для случая, изображенного на рис. 5.6, б, при  $d_{тр} = D_{сф}$  для достаточно длинных труб ( $L_{тр}/D_{сф} \geq 3$ ) коэффициент температурной транспирации остается равным 0,5. По всей видимости, это обусловлено плавным изменением температуры внутри системы.

Характер распределения температуры внутри системы оказывает значительное влияние на коэффициент температурной транспирации.

Можно определить, что полусферы занимают по 20 % общей длины системы. Граница температурных полей также проходит в этом месте (см. рис. 5.6). При такой постановке в достаточно длинной трубе сразу, т. е. независимо от соотношения температур, устанавливается режим, при котором коэффициент температурной транспирации составляет 0,65. При изменении температур он меняется незначительно.

В отличие от температуры влияние геометрического распределения температур на коэффициент температурной транспирации очень значительно.

Если для данной постановки изменить распределение температур так, чтобы в области  $Z = 0 \div 40\%$  (ранее в области  $0 \div 20\%$ ) система имела температуру 300 К и в области  $Z = 60 \div 100\%$  (ранее в области  $80 \div 100\%$ ) — 78 К, т. е. как бы «вдавить» температуры полусфер в трубу, а расчет коэффициента температурной транспирации вести по-прежнему через концентрации частиц в полусферах (а не в полусферах и частях трубы), то он получается равным 0,5.

Таким образом, можно сделать вывод, что все приведенные выше величины, влияющие на коэффициент температурной транспирации, являются составными частями одного интегрального параметра, который условно можно назвать «изолированностью объема». Под этим термином понимается степень изолированности объема, имеющего определенную температуру от потока частиц с температурой, отличной от температуры анализируемого объема.

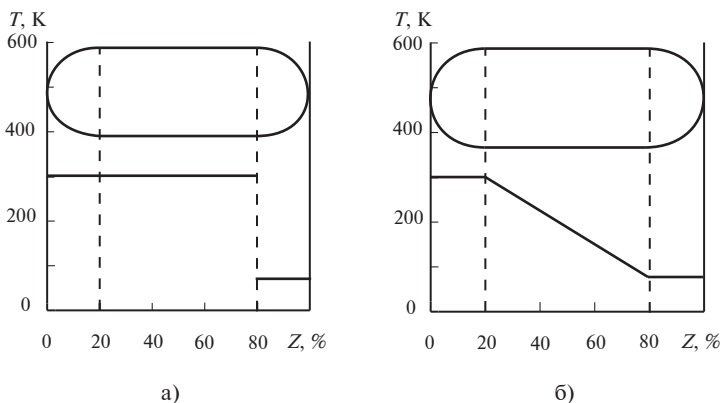


Рис. 5.6. Основные варианты температурных распределений

По итогам данной главы можно сделать следующие выводы:

- результаты численного расчета, выполненного для классической постановки задачи эффекта Кнудсена, полностью сходятся с теоретическими выкладками;
- численным путем получены данные, подтверждающие, что при определенных условиях коэффициент температурной транспирации может составлять около 0,6—0,8. Это происходит, когда в анализируемом объеме находится некоторое число частиц (достаточно 15—30 % общего числа частиц), температура которых отлична от температуры данного объема.

## Глава 6

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ СТРУКТУРНО- ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ

Вакуумные крионасосы обеспечивают получение сверхвысокого вакуума, свободного от органических загрязнений, и используются в качестве безмасляных средств откачки в различных технологических комплексах.

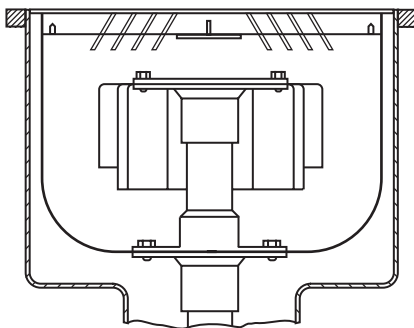
В настоящее время в эксплуатации находятся сотни крионасосов различных моделей. Наиболее широкое применение они получили в электронной, электротехнической, оптической промышленности, в установках нанесения многослойных селективных, солнцезащитных теплоотражающих покрытий на рулонные материалы, при испытаниях и доводке ионных двигателей, в ускорительных комплексах.

Одним из наиболее важных параметров, определяющих степень эффективности криогенного вакуумного насоса, является его внутренняя геометрическая структура — взаимное расположение различных элементов, конденсационных криопанелей, панелей с нанесенным сорбентом и др.

### 6.1. КОНСТРУКЦИИ И ОПИСАНИЕ КРИОНАСОСОВ

За период с 1980 г. разработаны и освоены в производстве крионасосы серии НВК различных модификаций с одно- и двухступенчатыми микроохладителями (МО), с быстротой действия по воздуху  $0,4—20 \text{ м}^3/\text{с}$  в диапазоне рабочих давлений  $5 \cdot 10^{-4}—1 \cdot 10^{-1} \text{ Па}$  и с диаметрами входных патрубков  $100—900 \text{ мм}$ . Общий вид блока криооткачки насоса НВК с  $D_y$  от 160 до 400 мм приведен на рис. 6.1.

Конструктивно крионасос представляет собой устройство, содержащее блок криооткачки с микроохладителем, компрессорную установку с блоком управления и соединяющие их кабели и трубопроводы. Наличие гибкой связи между компрессорной установкой и блоком криооткачки позволяет монтировать последний на расстоянии до 100 м от компрессорной установки в любом положении в пространстве.



**Рис. 6.1. Общий вид блока криооткачки вакуумного криогенного насоса**

Контроль температуры криостатирования на фланце микроохлаждителя обеспечивается с помощью Pt-термометров сопротивления, а наличие автоматических блокировок и возможность дистанционного контроля и управления крионасосом НВК позволяют полностью автоматизировать процесс откачки.

Для решения ряда прикладных задач, характеризующихся необходимостью откачки больших потоков газов (около  $1,0 \text{ м}^3 \cdot \text{Па/с}$ ) в течение длительного времени (например, при откачке камер имитации космического пространства в течение более 1000 ч), потребовалось создание крионасосов для откачки газов, конденсирующихся в молекулярном режиме течения при  $T > 35 \text{ К}$  (ксенон, криптон и др.). Использование конденсационных и попеременно работающих универсальных крионасосов (откачивающих все компоненты воздуха, в том числе водород, неон и гелий) обеспечивает время непрерывной работы вакуумной установки 1000 ч и более без разгерметизации. Одним из перспективных направлений является создание комбинированных крионасосов с охлаждением теплозащитных экранов жидким азотом.

Важным преимуществом этих насосов является способность работать в условиях больших тепловых нагрузок, в том числе и переменных во времени. По такой схеме могут быть созданы как конденсационные, так и универсальные крионасосы.

Для многокамерных установок нашли применение крионасосы с двумя блоками криооткачки с  $D_y$  от 100 до 200 мм, работающими от одной компрессорной установки.

Крионасосы выпускаются во фланцевом и встраиваемом исполнениях, а также с соответствующими стандартам присоединительными размерами фланцев по требованиям потребителей.

## 6.2. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭКРАНА НА ЕГО ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Общий вид блока криооткачки показан на рис. 6.1. Он конструктивно состоит из двух частей — панелей защитного экрана и криопанелей второй ступени с нанесенным на них сорбентом. Одной из основных функций защитного экрана является изоляция панелей второй ступени от воздействия легкоконденсируемых газов, таких как пары воды, масел, от теплопритоков излучением из «теплой» откачиваемой зоны.

Таким образом, эффективный экран — это структура, с одной стороны, обеспечивающая максимальную проводимость по откачиваемому газу, а с другой — предотвращающая перенос тепла излучением из «теплой» зоны на криопанели второй ступени.

Для определения теплопритоков излучением ко второй ступени крионасоса и его быстроты действия использовался разработанный программный комплекс для анализа сложных вакуумных систем [3], построенный на базе метода пробной частицы [4].

Расчетная схема крионасоса показана на рис. 6.2. Нужно отметить, что в расчетах использовалась упрощенная структура панелей второй ступени. Звездообразная оригинальная структура была заменена двумя соосными непроницаемыми цилиндрами. На рис. 6.3 показана суть изменений (представлен вид сверху). Штриховой линией изображена реальная структура, сплошной — упрощенная расчетная схема.

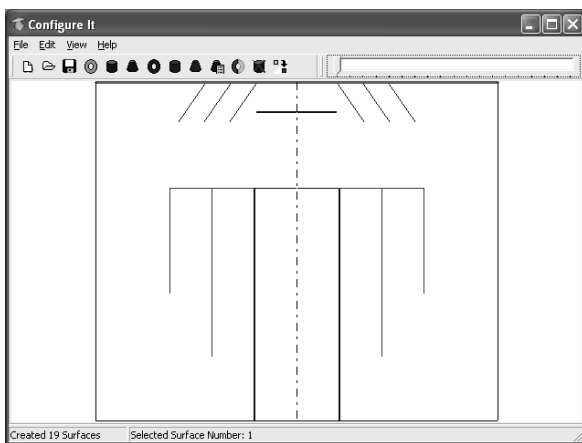


Рис. 6.2. Расчетная схема блока криооткачки с  $D_y = 200$  мм

При расчете теплопритоков излучением учитывалась их часть, падающая на панели второй ступени непосредственно из «теплой» зоны. Теплопритоки, отраженные от других элементов крионасоса, не принимались в рассмотрение ввиду их относительной незначительности — они составляют около 20—30 % суммарного теплопритока.

При расчетах быстроты действия предполагалось, что газ захватывается только панелями второй ступени. Коэффициент прилипания принимался одинаковым для всех элементов второй ступени.

В качестве варьируемого параметра был выбран угол наклона конических панелей экрана. В оригинальной конструкции фирмы APD этот угол равен 35°.

Для оригинальной конструкции с упрощенной структурой второй панели были рассчитаны значения быстроты действия по аргону. Результаты расчетов для насосов с  $D_y = 200$  и 400 мм показаны в табл. 6.1.

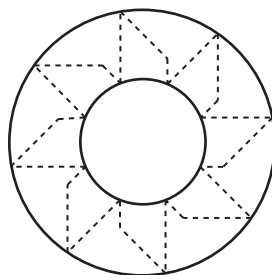


Рис. 6.3. Упрощенная расчетная схема второй ступени

Таблица 6.1  
Сравнение результатов расчетов быстроты действия,  $\text{м}^3/\text{с}$ , по аргону с экспериментальными данными

$D_y$ , мм	Расчет	Эксперимент	Отклонение, %
200	1440	1300	11
400	4500	5400	20

Относительно большие отклонения объясняются тем, что для расчета было проведено упрощение структуры второй ступени.

На рис. 6.4 и 6.5 показаны зависимости относительного теплопритока излучением и относительной быстроты действия от угла наклона панелей защитного экрана для насосов с  $D_y = 200$  и 400 мм соответственно. Теплоприток излучением и быстрота действия насоса рассчитывались по отношению к этим показателям для конструкции с углом наклона панелей 35°, т.е. оригинальной.

Из рисунков видно, что при уменьшении угла наклона конических панелей защитного экрана резко увеличивается теплоприток излучением ко второй ступени. При этом рост относительной быстроты действия по сравнению с ним невелик.

В то же время при увеличении угла уже до 45° наблюдаются незначительное (около 10—15 %) уменьшение относительной быстроты действия и гораздо большее (до 40—50 %) снижение относительного теплопритока.

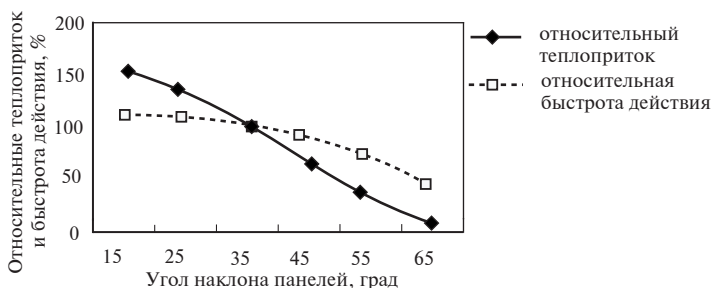


Рис. 6.4. Зависимость относительного теплопритока излучением и относительной быстроты действия от угла наклона панелей защитного экрана для насоса с  $D_y = 200$  мм

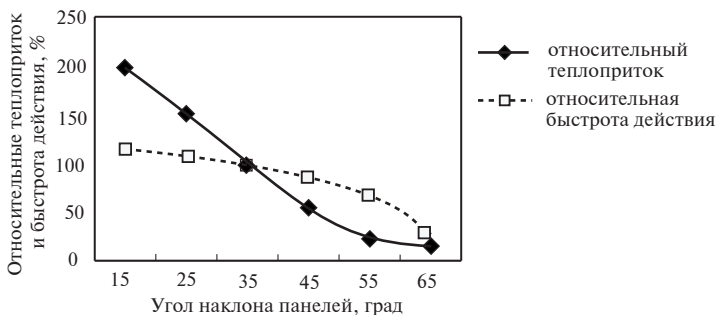


Рис. 6.5. Зависимость относительного теплопритока излучением и относительной быстроты действия от угла наклона панелей защитного экрана для насоса с  $D_y = 400$  мм

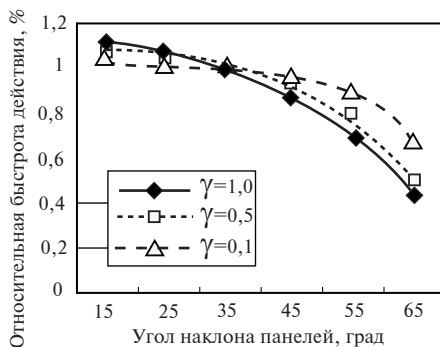


Рис. 6.6. Зависимость относительной быстроты действия от коэффициента прилипания поверхностей второй ступени

На рис. 6.6 показано, каким образом изменяется зависимость относительной быстроты действия от угла наклона конических панелей с изменением значения коэффициента прилипания поверхностей второй ступени крионасоса. Из рисунка видно, что при снижении коэффициента прилипания зависимость относительной быстроты



действия от угла наклона конических панелей становится менее выраженной.

Таким образом, можно сделать вывод, что для повышения ресурса работы крионасоса при откачке труднооткачиваемых газов целесообразно увеличить угол наклона конических панелей защитного экрана. Это приведет к существенному уменьшению теплопритока излучением из теплой зоны, что в свою очередь увеличит ресурс работы насоса. При этом снижение скорости действия будет незначительным.

Разработаны и освоены в промышленности криогенные вакуумные насосы нового поколения с скоростью действия по воздуху от 0,8 до 20 м<sup>3</sup>/с в диапазоне рабочих давлений  $5 \cdot 10^{-4}$ — $1 \cdot 10^{-1}$  Па и с диаметрами входных патрубков от 160 до 900 мм, в которых применены автономные экологически безопасные микрокриогенные системы Гиффорда—МакМагона с одно- и двухступенчатыми микроохладителями.

Проанализировано влияние изменения геометрических характеристик криопанелей защитного экрана крионасосов на их эффективность и предложены рекомендации по возможной модернизации конструкции защитного экрана в целях увеличения эффективности его работы.

# КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

## *Глава 1*

1. Назовите основные факторы, оказывающие влияние на условия функционирования реальной вакуумной системы.
2. Перечислите режимы течения газа.
3. Чем различаются коэффициенты захвата и прилипания?

## *Глава 2*

1. Какова область применения метода Монте-Карло пробной частицы?
2. Расскажите об области применения метода угловых коэффициентов.
3. В чем различие между элементарным, локальным и средним угловыми коэффициентами?

## *Глава 3*

1. Перечислите известные вам методы расчета проводимости сложного трубопровода.
2. Объясните зависимость быстроты действия насоса Marathon-8 от количества накопленной воды.
3. Какие изменения конструкции насоса привели к значительному повышению его эффективности?

## *Глава 4*

1. Какие параметры влияют на форму криослоя?
2. Как влияет коэффициент прилипания на индикатрису рассеяния частиц на выходе из трубопровода?
3. Чем обусловлена ярко выраженная неоднородность распределения молекулярной концентрации (приведенного давления) внутри системы вакуумной изоляции катушек тороидального поля ITER?

## *Глава 5*

1. Что такое термомолекулярный эффект?
2. Как влияет конфигурация системы на коэффициент температурной транспирации?
3. Каково влияние температуры на коэффициент температурной транспирации?

## *Глава 6*

1. Как влияют геометрические характеристики защитного экрана на характеристики крионасоса?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Саксаганский Г.Л.** Молекулярные потоки в сложных вакуумных структурах. М.: Атомиздат, 1980.
2. **Fischer E., Mommsen H.** Monte-Carlo computations of molecular flow in pumping speed test domes // *Vacuum*. 1967. No. 17. P. 309.
3. **Suetsugu Y.** Application of the Monte-Carlo Method to Pressure Calculation // *J. Vac. Sci. Technol.* 1996. V. A 14. No. 1. P. 245.
4. **Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.** Теплопередача: Учебник для вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоиздат, 1981.
5. **Davis D.H., Levenson L.L., Milleron N.** Effect of “rougher-than-rough” surfaces on molecular flow through short ducts // *J. of Appl. Phys.* 1964. V. 35. No. 3. P. 529—532.
6. **Hydrogen** pumping simulation for cryopumps / M. Boiarski, L. Wagner, S. Nesterov, Yu. Vassiliev // *J. Vac. Sci. Tech.* 1999. V. 17. No. 4. P. 2099—2103.
7. **Haefer R.A.** Kryo-Vakuumtechnik: Grundlagen und Anwendungen. Springer—Verlag. Berlin, 1980.
8. **Нестеров С.Б., Андросов А.В.** Расчет профилей криослоев // *Вакуумная техника и технология*. 2001. Т. 10. №4. С.137—143.
9. **Васильев Ю.К., Нестеров С.Б.** Исследование влияния микроструктуры на характеристики нераспыляемых геттеров // *Вакуумная техника и технология*. 2000. №1. С. 9—14.
10. **Быков Д.В., Нестеров С.Б., Сабирзянов Н.Р.** Расчет сложных вакуумных систем: Учебное пособие. М.: МГИЭМ, 2003.
11. **Nesterov S., Vassiliev Yu., Longworth R.C.** Effect on pumping-speed measurements due to variations of test dome design based on Monte-Carlo analysis // *J. Vac. Sci. Technol.* 2001. June/July.

*Научное издание*

**Нестеров Сергей Борисович, Васильев Юрий Константинович,  
Андросов Александр Васильевич**

## **МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВАКУУМНЫХ СИСТЕМ**

*Редактор Н.Н. Сошникова*

*Технический редактор Т.А. Дворецкова*

*Корректоры Е.П. Севостьянова, В.В. Сомова*

*Компьютерная верстка Л.Н. Тыгиной*

Подписано в печать с оригинала-макета 24.12.04

Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 13,75

Тираж 300 экз.

Гарнитура Таймс.

Усл.-кр. отт. 14,5

Заказ

Формат 60×90/16

Печать офсетная.

Уч.-изд. л. 12,7

С-033

Издательство МЭИ, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14.

Типография ЦНИИ «Электроника», 117415, Москва, просп. Вернадского, д. 39.